

海洋工学を学ぶ人のための流体力学

Ver. 2.0

二瓶 泰範

<http://hydrodynamics.marine.osakafu-u.ac.jp/>

2022 年 9 月

目次

第 1 章	流体力学の工学への応用	1
1.1	風力発電	1
1.2	Green vessel	3
1.3	船舶	5
第 2 章	流体の物理的性質	8
2.1	流体の分類	8
2.2	次元および単位	8
2.3	粘性	9
2.4	圧縮性	9
第 3 章	静止流体の力学	12
3.1	圧力	12
3.2	圧力の性質	13
3.3	圧力の測定	14
3.4	全圧力と圧力中心	15
3.5	浮体静力学	17
第 4 章	流体の基礎運動	25
4.1	流体運動の記述法と流体加速度の関係	25
4.2	流線	26
4.3	流体粒子の運動	27
4.4	流量と循環	29
第 5 章	完全流体の力学	31
5.1	輸送定理	31
5.2	連続の式	32
5.3	Euler の運動方程式	33
5.4	流体力学における運動量保存則	35
5.5	Bernoulli の定理	36
第 6 章	略解	38
	参考文献	40

第 1 章

流体力学の工学への応用

既に多くの教科書に興味深い流体力学的現象が述べられている。現象論はそのような教科書に譲るとして、ここでは流体力学の工学的な応用先について触れてみることにする。流体力学的知見の応用は機械工学、航空工学、土木工学、環境学等々他分野においても広く為されていることは想像に難しくない。ここでは、私自身が主として研究対象としてきた風力発電、帆船に代表される Green vessel、船舶の流体力学との関係性について見てみたいと思う。

1.1 風力発電

2015 年 12 月の第 21 回気候変動枠組条約締約国会議 (COP21) でパリ協定が採択された。世界的な平均気温上昇を産業革命以前に比べ 2°C より十分低く保つとともに、 1.5°C に抑えるよう努力を続けることを目標に掲げた。また、各国は温室効果ガス (greenhouse gas:GHG) の人為的な発生源による排出と吸収源による除去量を均衡させるよう取り組むことが求められている。いわゆるカーボンニュートラルを意味している。日本ではパリ協定合意に先立つ 2015 年 7 月に 2030 年度に GHG 排出量を 2013 年度に比べ 26% 削減する目標を掲げた「日本の約束草案」を地球温暖化対策本部で決定している。長期戦略では 2050 年までに 80% の GHG 排出削減を掲げている。

風力発電は陸上での実績も多数あり、さらには洋上の風は比較的安定しており平均風速も高いことから洋上の風力発電の実用化が期待されている。洋上風力には大きく 2 つの設置工法がある。1 つが着床式であり、もう 1 つが浮体式である。水深 30m~50m くらいまでは着床式を用いることが可能である。それ以深では浮体式を用いる。



図 1.1: 浮体式風車の浮体形式 [1]

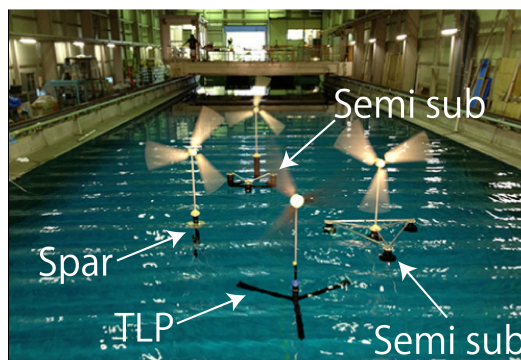


図 1.2: Nihei et al. による水槽試験 [2]

浮体式になると風車タワーから下は浮体と、係留チェーンや係留ワイヤーや係留ロープ等と、アンカーとなる。図 1.1 及び図 1.2 に浮体式風車用の浮体形式を示す。(a) スパー型 (Spar:筒), (b) セミサブ型 (Semi submersible:半潜式), (c) TLP 型 (Tension Leg Platform), (d) バージ型 (barge:箱船) に大きく分類される。一般的にスパー型は構造が単純なため製造コストを他の浮体より低く抑えることが可能である。一方で、タワー高さと同程度程度の喫水が必要とな

り使える水深に限られる．スパー型はコストが低いということもあり使用海域さえあれば商業利用が一番最初に始まる．Scotland の北東部沖合 25km の沿岸に 5 基の 6MW のスパー式風車が 2017 年から商業運転している (図 1.3 [3])．また日本でも九州五島沖で商用運転の計画が進行中である [4]．図 1.4 は五島沖の浮体式風車である．現在は 1 機浮いているが、今後数機での商用運転が始まる．



図 1.3: Scotland 沖の Hywind Scotland



図 1.4: 五島沖の浮体式風車

さて、この風力発電と流体力学の関係性について述べる．例えば風車のブレードは翼で出来ている．翼の力学は、1903 年にライト兄弟が世界最初の有人動力飛行機を発明して以来大きく進展したと言えよう．揚力や抗力の理論構築、実験による検証が進み、飛行機の実用化を通して技術的に目覚ましい進化を遂げた．その後、翼の力学は様々な所で応用されている．船や扇風機やエアコン内のプロペラも翼の応用例である．そして、上述のように近年進化を続けている風力発電も翼の技術を用いている．図 1.5 には回転する風車の翼断面を示している．翼は流れに対して垂直方向に力を発生することが出来るので図 1.5 に示すように回転方向の力を生み出すことが出来るのである．翼の力学の非常に興味深い応用事例と言えよう．

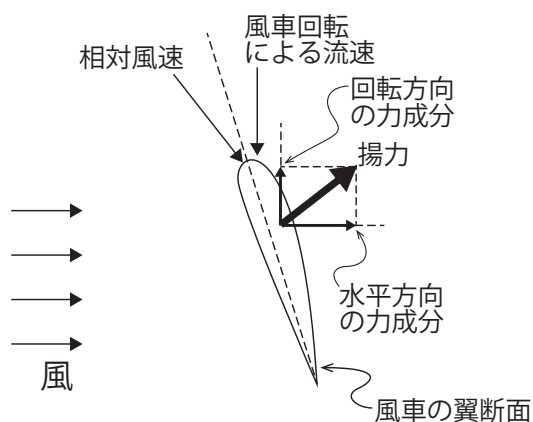


図 1.5: 風車ブレード断面の流体モデル



図 1.6: オランダキンデルダイクの風車

翼の科学的解明は確かに飛行機の技術と相まって進歩したと言えるが、実は人は古くから揚力は経験的に使っているのである．我々がオランダのキンデルダイクに見る昔ながらの風車も翼の技術を使っている (図 1.6)．また、後述することになる帆船技術もセイルが生み出す揚力を利用している．船の舵も翼である．昔の船は板形状であるが、これも立派な平板翼の部類に入る．このように人類は知ってか知らずか、今となっては知る術が無いが、揚力というものを見事に使いこなしてきているのである．

さて、浮体式風車の浮体部分に着目してみたい．この浮体も流体力学的知見を応用した事例であると言えよう．まず、どうして浮かぶのか、どうして風や波の中でも元通り復原するのか．これは浮体と流体との静力学的な関係性により説明が出来る．波の浮体へ作用する力や浮体が波に与える影響、所謂相互作用も海洋工学における流体力学的な問題である．一つ一つの現象の解明なくして浮体式風車等の技術の実用化や最適化は難しいのである．流体力学の進展が進んだことにより、現在では比較的容易に浮体式風車の諸現象の解明が進んでいる．

1.2 Green vessel

近年、温室効果ガスの削減が叫ばれる時代になってきている。船舶にもその流れが来ている。古くは帆船があり、風だけの力を使って大海原を駆け巡ってきた。現代でもわが国では日本丸や海王丸 (図 1.7) に代表される帆船も運航しており、船員教育等に使われている [5]。勿論大型帆船は船員教育には不可欠であり、我が国のみならず各国でも運用されている事実は忘れてはならない。このような練習船は展帆作業や縮帆作業に多くの乗組員が必要となり、経済的にも効率的な運航が求められる現代商船において日本丸や海王丸のような大型帆船技術をそのまま使うことは難しいと言える。そこで大内等は図 1.8 に示される Wind challenger 計画を発表し [6]、日本丸や海王丸のような軟帆 (ソフトセール) ではなく、テレスコピック構造と硬帆 (ハードセール) を組み合わせたリグ (セールやマスト等のシステムの総称) を提案した。そして、これをバルクキャリアー等といった商船に搭載し大幅な燃料削減を図る技術を構築しつつある。



図 1.7: 海王丸 [5]

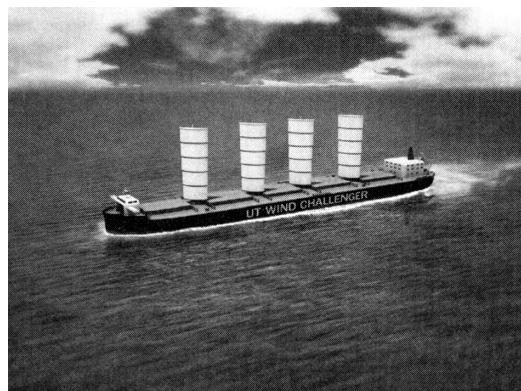


図 1.8: Wind challenger 計画 [6]

大航海時代の帆船も Wind challenger 計画もセーリングヨットも力学的には全く同じメカニズムで航行している。風下のみならず風上にも航行可能である。但し真風上には進むことは出来ないでジグザグ航行 (タッキング) しながら風上に航行させる。ヨット競技は帆船特有の操船方法と風の変化の読みを巧みにしながら行う競技であり、洋上のチェスとも呼ばれており、世界中で広く楽しまれている。図 1.9 は 470 級ヨット、図 1.10 はスナイプ級ヨットであり、学生競技ヨットの花形クラスである。



図 1.9: 470 級 (大阪府立大学体育会ヨット部写真提供)



図 1.10: スナイプ級 (大阪府立大学体育会ヨット部写真提供)

ここで、帆走船の風上帆走メカニズムを簡単に説明したいと思う。以下、二瓶による講義 (初年次ゼミナール, マリンレジャーとヨット) の資料 [7] の転載である。

定常帆走時の力の釣り合いを示した図が図 1.11 である。図 1.11 を順を追って考えてみる。(a) に、セールが生み出す揚力を成分分解したものを示している。風向が α である時、セールの揚力を推進方向 ($\sin$ 成分)、横方向 ($\cos$ 成分) に分解することができる。 $\sin$ 成分は推進力となる。また、 $\cos$ 成分は横流れの成分となる。このままでは横流れが大

きく、思ったように船体を推進方向に真っすぐ進めることができないであろう。

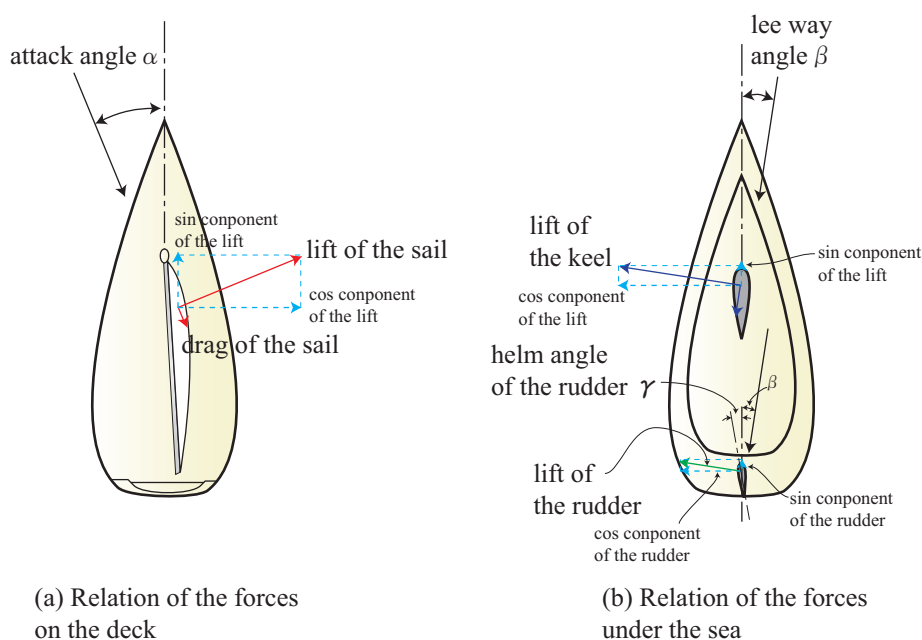


図 1.11: ヨットの風上帆走中の力学モデル [7]

次に、水面下の流体力について考えることとする。先ほど、セールの揚力が横流れを生み、推進方向に真っすぐ進めないのではないかと述べた。この問題点を解決する役割を大きく担うのがセンターキールである。舵（ラダー）もセンターキールと同じ原理でその役割を担うが、センターキールほどの翼面積はないため横流れ抑制効果はセンターキール程ではないと考えられる。これについては後述する。(b) に水流によってセンターキール及びラダーが生み出す揚力の様子を示している。船体（ハル）がセールの揚力により推進及び横流れを始めると、センターキール及びラダーに水流が生じる。これらはセールに比べて非常に小さいが、海水の密度は空気のそれに比して非常に大きいので、これらから生じる流体力はその面積が小さくとも流体力は大きい。センターキール及びラダーにはハルの推進及び横流れに伴って迎角が生じ、揚力が発生する。その揚力の $\cos$ 成分はセール揚力の $\cos$ 成分と逆向きであるため、横流れはこれによって打ち消される。しかし、これらから揚力を発生させるためにはある一定程度の迎角は必要であるのでハルは斜航しなければならない。この斜航のことを leeway（リーウェイ）と呼ぶ。いずれにしてもキール及びラダーからの揚力によって横流れが大きく抑制されるのである。

最後に定常帆走時のラダーの役割について考えてみたい。ラダーは回頭するためにあることはよく知られている。しかしセーリングヨットでは少し違う一面がある。セール、キール、ラダーそしてハルの力の作用点位置は風速によって様々に変化する。一般的にターゲットボートスピードにおいて若干のウェザーヘルムでセーリングヨットはデザインされている。ウェザーヘルムとは風上帆走時にラダーを切らない場合、風上方向にヨットが回頭することを言う。つまり、力学的にこれを見れば風上帆走時においてラダー角 γ を $0[\text{deg}]$ とした場合、セールの流体力中心が水面下流体力中心の前方にあるということである。ラダーはこのウェザーヘルム解消のために定常帆走時でも船体が目的方向に向くように若干切る必要があるのである。

ここから分かることは、セーリングヨットも揚力の特性を上手に生かしているということである。そして、セーリングヨットは大航海時代より以前から存在していた。人類は風車もそうであったように飛行機が飛ぶ前から揚力を上手に利用していたことを裏付けている。一方で科学的にはどうであったであろうか。揚力についての流体力学的な理論的体系が構築されたのは飛行機が人類史に登場した 1903 年以降であると言っても過言ではない。そしてここから我々は飛躍的に揚力の仕組みについて理解を深めることとなり、揚力等の技術を用いるセーリングヨットのみならず風車等の工学的ツールについて経験だけに依らない合理的な設計が可能になったのである。

1.3 船舶

もう一つの船舶の事例として四胴型自動航行船を紹介したい。国際的な肉・魚等の動物性たんぱく質の摂取量は飛躍的に増大しており、陸上部で生産される牛肉等のたんぱく質だけでは不足、水産資源で賄われている。その大きな担い手として養殖業がある。漁業全体の生産量が減少する中、養殖業は安定した生産量を維持し、生産額においてもその重要性が高まっており 2017 年には約 40% を占めるなど、今や養殖業は我が国水産業における一大産業であると言える。特にインバウンドに代表される国際的な日本食ブームにより、低コスト化はもとより高価格でも高品質であれば確実に需要が伸びる見通しが出てきたことは養殖業界にとって大きなフォローとなってきた。また、水産資源の減少と共に海洋環境の悪化や燃料の高騰、漁業者の高齢化や後継者不足等の問題に直面しており、益々養殖業への期待が高まっているのが現状である。

一方で、海面養殖はリスクと隣り合わせでもある。大きな原因として挙げられるのが、貧酸素水塊、低塩分水、水温上昇、貝類にとっての餌といえる植物プランクトン（クロロフィル a）の欠如、赤潮等による水質環境悪化である。最近、観測史上類を見ない台風・集中豪雨等の異常気象に起因する養殖魚介の斃死、実入りの悪化が生じ、養殖漁業に深刻かつ重大な経済的悪影響を与える事例が起きている。

養殖場のような数 km× 数 km といった広大な海域では水質に時空間分布があり、ブイや人力計測では限界がある。また、実測の詳細な計測データが存在しない為、養殖場における高密度な水質予報システムが存在していないのが現状である。そこで、二瓶らが独自に研究開発してきたのが、四胴型自動航行船 (図 1.12) である。水上ドローンと呼ばれることもある。4つの船体を持ち、これらの船体は独立に回転することができる (図 1.13)。これによって風の中での定点保持が容易になったり (特許 6332824 号 [8])、養殖場のような様々な障害物がある海域で小回りの利く操船が容易になる (特許 6796292 号 [9])。



図 1.12: 四胴型自動航行船

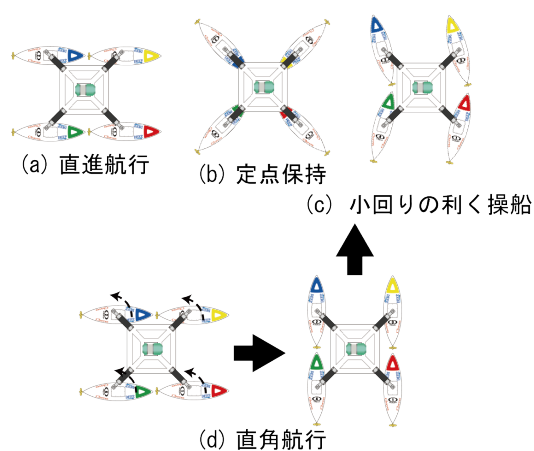


図 1.13: 船体が独立に回転することが出来、様々な操船が可能

実際の計測事例を示す。2019 年に四胴型自動航行船を使って石川県七尾西湾のカキ養殖場において自動環境計測を行った。得られた水温の鉛直断面図を図 1.15 に、計測ポイントおよび航行コースを図 1.14 に示す。計測及び周回の所要時間は 1 コースが約 2 時間半、2 コースが約 3 時間半であった。

図 1.15 は、養殖場周辺の狭い海域内においても、細かい水温構造が約一か月で劇的に変化していることを示唆している。9 月 14 日では、それまでの海面加熱によって、全体的には水深の浅い海域では高温、深い海域では低温となるような 9 月を代表する水温鉛直構造を示し、沿岸海域では一般的にみられる水温プロファイルである。ただし、1 コースより 2 コースの方が水温は高い。特に 2 コースには、海水が淀みやすい水深 2 m 以下の湾奥が存在し、地形性貯熱効果によって 30℃ 近くに達している。その水温構造が、9 月 30 日では全地点で鉛直的にほぼ一様水温 (24~25℃) となり、台風 17 号 (9 月 23 日接近) の強風による鉛直混合によって形成された水温構造と考えられる。10 月 9 日になると海面冷却期に入っているため水温が低下 (20~22℃) するものの、海面の方が低温で、深くなるにつれて高水

温になる水温逆転構造を示しているのが興味深い。



図 1.14: 2019 年 四胴型自動航行船による自動環境計測コース

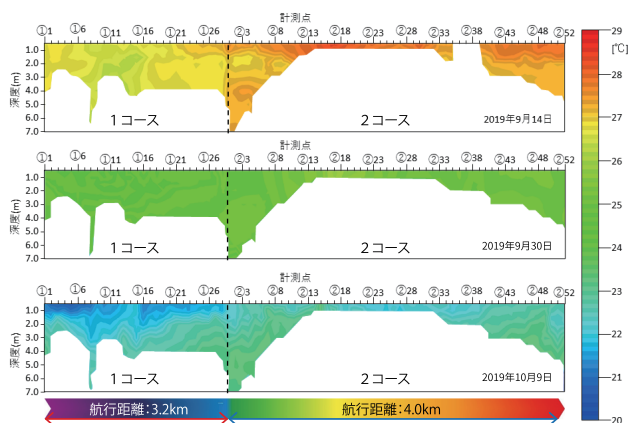


図 1.15: 1 および 2 コースにおける鉛直水温断面図

この四胴型自動航行船における流体力学との関係を少し述べてみたい。二瓶等は四胴型自動航行船の風の中での性能を明らかにしている [10]。本船の風圧下での性能は簡単な VPP (Velocity Prediction Program) を構築することにより行っている。船固定座標系における船長手方向の力のつり合い方程式を以下の式 (1.1) に示す。

$$-R_0 - X_A + (1 - t)T = 0 \quad (1.1)$$

ここで、 R_0 は船体抵抗 [N]、 X_A は上部デッキ空力抵抗 [N]、 T はプロペラ推力 [N]、 t は推力減少率である。船体抵抗及び空力抵抗は回流水槽試験、風洞試験により求め、プロペラ推力はデータベース [11]、推力減少係数は Van Lammern の推定式から求めた。各風向に対する上部デッキの船速方向の抗力を計測した風洞試験の結果を図 1.16 に示す。また各プロペラの回転数は一定、喫水は満載喫水時の半分の 10cm として計算を行った。この喫水は実海域試験時の喫水である。

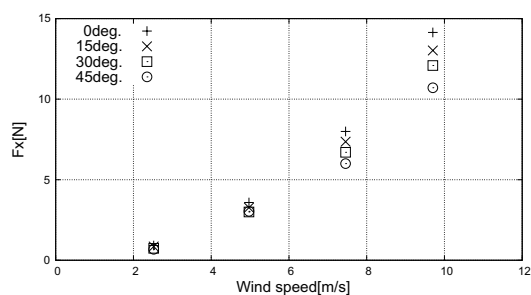


図 1.16: 上部デッキの風洞試験結果

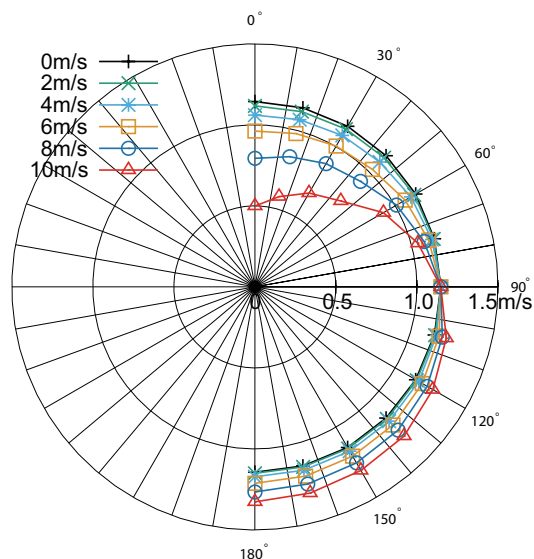


図 1.17: 四胴型自動航行船の風圧下での航行性能

図 1.17 に式 (1.1) より得られた絶対風向 ($0 \sim 180^\circ$)、絶対風速 ($0 \sim 10 \text{ m/s}$) に対する船速の推定結果のポーラーカーブを示す (風が 0° 方向から来ている場合に各方向に航行する船速)。例えば風速 10 m/s 、風向 0° の正面向かい風中では本船が航行する場合、無風時と比べ 56% 程度船速低下がみられ航行性能に大きく影響を及ぼすことが分かった。

また風速が 1 m/s 以下の実海域環境下で複数回一定時間直進航行させ、本船の船速を調査した。この実海域で得られた船速を図 1.17 の VPP による推定結果と比較した。実海域試験の船速は 0.998 m/s であったのに対し、無風時の推定

結果は 1.14m/s であった (ただし潮流, 波等の外乱及び PID 制御に伴う抵抗の増加は考慮していない). 推定手法との誤差は 12.8% であった. 船の水抵抗や上部デッキに生じる空力抵抗やプロペラ推力は全て流体力学的知見を必要とする. ここにも流体力学の応用が見て取れる.

第 2 章

流体の物理的性質

2.1 流体の分類

物質は個体、液体、気体に分類することが出来る。流体とは液体、気体に加え、プラズマの総称を指している。

個体と流体の違いは変形に対する抵抗と言える。鉄や木材は変形すると元に戻ろうとする。一方で、流体は変形しても戻らない。しかし、何かしらの変形に対して抵抗を示す。これを粘性と言う。また、圧縮に対しては圧力を増し、もとの体積に戻ろうとする。これを体積弾性と言う。この粘性と圧縮性に着目して流体の諸現象を分析することが重要となる。と言うのも、全ての影響を考慮して流体の問題を解くのが難しい場合が多いからである。結果に大きな影響を及ぼさない因子はなるべく無視し、簡素化して取り扱う。

例えば、船が波を作りながら海を航行している場合を考えよう。船は水からの抵抗を受けていることが容易に想像できる。そして、この船に作用する水からの抵抗は3つから成り立っていると考えられる。まず一つ目は船の表面と水との間の摩擦である。もう一つは船の形状に由来する抵抗である。船舶工学では圧力抵抗と呼ばれる。最後に船が波を作って航行している訳であるから、波を造る代わりに波から作用反作用の関係で抵抗を受けていると考えられる。船舶工学では造波抵抗と呼ばれる。これらの3つの流体力学的特性はそれぞれ生じるメカニズムが異なっている。例えば摩擦抵抗は水の粘性によって生じる。粘性が大きくなってくると当然ながら摩擦抵抗は大きくなる。そして、水と船の表面積が大きくなることでも摩擦抵抗は大きくなる。圧力抵抗は形状によって変わることも想像できる。これらの現象を流体力学的に解析する時には水は非圧縮性の仮定をおいて解かれるのが一般的である。本章では簡素化においてキーワードとなる流体の粘性、圧縮性について述べる。

2.2 次元および単位

全ての物理量は基本的ないくつかの量の組み合わせで成り立つ。この基本的な指数を次元または元という。流体力学はニュートン力学の延長上にあり、力学量の基本量として長さ (L)、質量 (M)、時間 (T)、温度 (θ) が用いられる。それ以外の物理量についてはこの次元の組み合わせとして表される。表 2.1 に基本量の次元と単位を示す。

表 2.1: 基本量の次元と単位 (SI 系)

量	長さ	質量	時間	温度
次元	L	M	T	θ
単位	m	kg	s	K

基本量に対して単位が定められている。国際単位系 (SI 単位) では長さに対して m, 質量に対して kg, 時間に対して s(秒), 温度に対しては $^{\circ}\text{C}$ (または K:ケルビン) を定めている。時間については min(分), hour(時), day(日) も使用される。

密度や圧力や力や粘度等、流体力学で用いられる物理量は基本量の組み合わせで定義される。

密度は流体 1m^3 当たりの質量のことであり単位は kg/m^3 である。密度はしばしば記号 ρ で表す。また、次元は

M/L^3 である。4 °C, 1 気圧における水の密度は $1000\text{kg}/\text{m}^3$ であり, 常温常圧の空気の密度は約 $1.2\text{kg}/\text{m}^3$ である。ある物質の密度を ρ として水の密度 ρ_w に対する比を比重 s と言う。

$$s = \frac{\rho}{\rho_w} \quad (2.1)$$

この時の水の密度は 4 °C, 1 気圧の $\rho_w = 1000\text{kg}/\text{m}^3$ を用いる。

流体力学でよく使われる単位や次元について表 2.2 にまとめる。

表 2.2: 組み合わせ量の次元と単位 (SI 系)

量	密度	力	圧力・応力	粘度	動粘度	仕事・エネルギー	仕事率・動力	ガス定数
次元	M/L^3	ML/T^2	M/LT^2	M/LT	L^2/T	ML^2/T^2	ML^2/T^3	$L^2/T^2\theta$
単位	kg/m^3	N	Pa	$\text{Pa} \cdot \text{s}$	m^2/s	J	W	$\text{J}/(\text{kg} \cdot \text{K})$

2.3 粘性

運動する流体中の物体には圧力の他に物体表面に沿って力が働く。この作用のことを粘性と呼び, この力のことを粘性力と呼ぶ。この力の大きさについて考える。図 2.1 のような面積 S , 隙間 h の平行な 2 面の板の間に流体が満たされているとする。片方の板を速度 U で動かすときには粘性力が生じるので, それと同じ力 F で押す必要がある。

この力 F の大きさは面積 S , 速度 U に比例し, 隙間の距離 h に反比例する。よって以下のような関係を得る。

$$F \propto \frac{SU}{h} \quad (2.2)$$

この時の比例定数を μ として,

$$F = \mu \frac{SU}{h} \quad (2.3)$$

が摩擦力として与えられる。この μ のことを粘度という。また, 単位面積当たりの摩擦力をせん断応力 τ と定義して

$$\tau = \frac{F}{S} = \mu \frac{U}{h} \quad (2.4)$$

となる。

粘度 μ をその流体の密度 ρ で割ったものを ν で表し動粘度という。

$$\nu = \frac{\mu}{\rho} \quad (2.5)$$

粘度の単位は $\text{Pa} \cdot \text{s}$ である。また, 動粘度の単位は m^2/s である。常温の水および空気の動粘度はそれぞれ約 $1.00 \times 10^{-6}\text{m}^2/\text{s}$, 約 $15.1 \times 10^{-6}\text{m}^2/\text{s}$ である。液体は温度が高いほど粘度は低下し, 気体はその逆となる。

通常, 速度の勾配 U/y と粘度 μ の関係は無関係であると考えてよい。このように考えられる場合をニュートン流体という。一方, 粘度 μ が速度の勾配によって変化するような性質を持つものを非ニュートン流体という。また, 図 2.2 のように速度の勾配が一定でない場合,

$$\tau = \mu \frac{du}{dz} \quad (2.6)$$

が成り立つ。

2.4 圧縮性

流体の性質を表す指標に圧縮性というものがある。図 2.3 のような体積 V のシリンダ内にある流体が入っているとす。この時の圧力を p とする。ピストンを押し込み体積 V_1 にした。そしてこの時の圧力が p_1 になったとする。圧縮性の指標として, 体積ひずみ

$$\frac{V_1 - V}{V} = \frac{dV}{V} \quad (2.7)$$

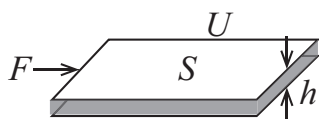


図 2.1: 平行に置かれた平板を水平方向に動かす

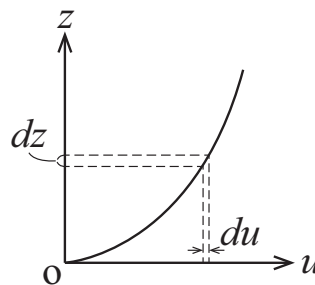


図 2.2: 速度分布が一定ではない場合

が小さい場合，圧縮しにくい流体であると言えよう．次に，圧力はどうか．

$$p_1 - p = dp \quad (2.8)$$

が大きければ大きい程，圧縮しにくい流体である．即ち

$$K = -\frac{dp}{dV/V} = -V \frac{dp}{dV} \quad (2.9)$$

が大きいと圧縮しない流体であると言える．この K のことを体積弾性係数という．

体積弾性係数は圧力と同じ次元を持つ．常温常圧の水は約 2.10GPa，常温常圧の空気では約 142kPa である． $K = \infty$ ，つまり大変圧縮しにくい流体のことを非圧縮性流体と言う．

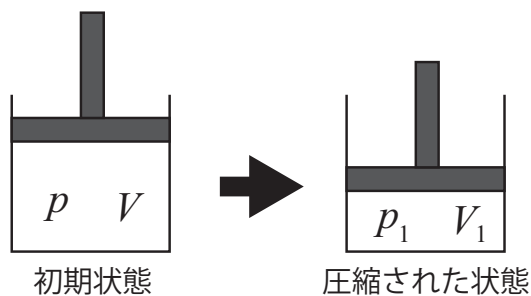


図 2.3: ピストンの状態

Exercise

1. 水 900ml とグリセリン 100ml とを混合させた液体を作った. この混合した液体の質量を求めなさい. この液体の密度, 比重を求めなさい.
2. 水銀の比重が 13.54 である時, 密度を求めなさい.
3. 下図 2.4 のように内径 D のシリンダー内に直径 d , 長さ l のピストンを同軸にはめ, 速さ v で動かすとき, ピストンとシリンダーとの間のすきまを粘度 μ の潤滑油が満たしているとすればピストンに加えるべき力 F はどれほどか.

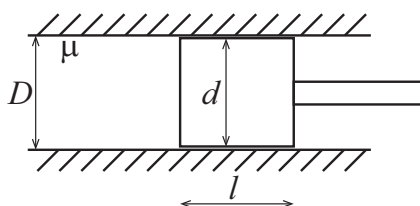


図 2.4: 問 3

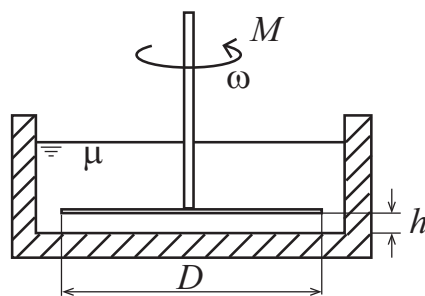


図 2.5: 問 5

4. 上図 2.4 のピストンとシリンダーの組み合わせで往復運動する代わりに軸の周りに角速度 ω で回転しているとすると, ピストンに加えるべきトルク M はどれほどか.
5. 図 2.5 のように直径 D の円盤が微小なすきま h を隔てて水槽底と向かい合っており, 中心の周りに ω で回転しているとすれば円盤に加えるべきトルク M はどれほどか.
6. ある状態での海水の体積弾性係数 $K = 2.23\text{GPa}$ であるとすれば 1MPa の圧力変化に対する体積変化は何 % か.
7. 気体が等エントロピー変化をなすとき, 体積弾性係数 K は圧力 p のみによって定まり, $K = kp$ であることを示しなさい. また, これより常圧 (101.3kPa) の気体の体積弾性係数の値を求めなさい. 但し, $k = 1.4$ とする.
8. 剛体容器の中に標準状態 101.3kPa , 温度 10°C の海水が 1L ある. 容器内の圧力を 10MPa 上昇させた際の体積を求めなさい.

第3章

静止流体の力学

本章では流体力学の基本ともいべき静止流体の力学について考えてみたい。流体の運動を考えるうえで圧力のことを考えることがとても重要である。ここでは、圧力の定義から始め、圧力の性質、圧力の測定方法について述べる。我々の周りにはダムや水門がある。これらは基本的には静止流体の応用事例であると言える。本章では水門を事例として全圧力や圧力中心といったものについて考えてみたいと思う。本章の最後で扱うのが浮体静力学の問題である。船や石油リグや浮体式風車等々、海に浮かぶものは転覆しないように設計されている。どうして転覆しないのだろうか。これを浮体静力学は明確に教えてくれる。本章ではこれを解き明かす鍵となる浮心の移動や GM ということについて考察してみたい。

3.1 圧力

流体内の各部は互いに力を及ぼして押し合っている状態にある。これを圧力という。図 3.1 のように流体内に考えた面積 Δs の断面に垂直に生じる力の大きさを ΔP とする時、

$$p = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta P}{\Delta s} = \frac{dP}{ds} \quad (3.1)$$

を圧力という。

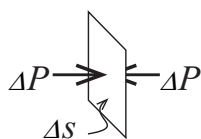


図 3.1: 圧力の定義

力の単位を N, 面積の単位を m^2 とすれば、圧力の単位は $Pa (= N/m^2)$ である。 $kPa (= 10^3 Pa)$ や $MPa (= 10^6 Pa)$ もよく使われる。また、大気の圧力の単位として気圧を用いることもある。1 標準気圧 (1atm) は $101.325 kPa$ である。

圧力を表すとき、大気圧 p_{atm} を基準にしたゲージ圧 p_{gauge} と完全真空を基準にした絶対圧 p_{abs} がある。両者の関係は

$$p_{abs} = p_{atm} + p_{gauge} \quad (3.2)$$

で表される。Gauge は計器という意味であり、ここら分かるようにゲージ圧は計測器で測った圧力である。但し、これは水圧計のような機器には当てはまらないので注意が必要である。水圧計は計測器であるのでゲージ圧と言うこともできるが、大気圧を含んだ形で圧力を計測しているので絶対圧を計測していることになる。

3.2 圧力の性質

1. 点に生じる圧力 … ある点での圧力は全ての方向に等しい大きさで作用する. (図 3.2)

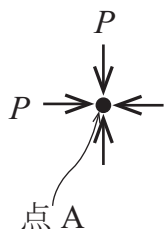


図 3.2: ある点 A に生じる圧力 P

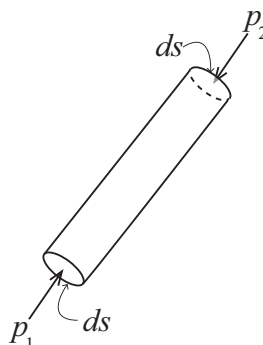


図 3.3: パスカルの原理

2. 面に作用する圧力 … 圧力は平面や局面の法線方向（垂直）に作用する.
3. 圧力の伝達 … 密閉された容器の中の流体の一部に加えられた圧力は容器内の流体の全ての部分に伝達される. これをパスカルの原理という. 図 3.3 に示すように流体内に仮想的な断面 ds の円筒を考え, その力の釣り合いを考えると $p_1 ds = p_2 ds$ であるので, $p_1 = p_2$ となる. このように, 重力の影響を除いて静止流体中では圧力は流体の全ての部分にそのまま伝達される. これを応用したものとして図 3.4 のような流体を密閉した容器を考える. F_1 , F_2 の力を上からかける. この状態で釣り合っている時を考える. 流体内の圧力はそのまま伝達されるので,

$$p = \frac{F_1}{S_1} = \frac{F_2}{S_2} \quad (3.3)$$

が成り立つ. ここから

$$F_1 = F_2 \frac{S_1}{S_2} \quad (3.4)$$

が得られる. すなわち, 断面積の大きい側は大きな力を受けることができる. これは油圧装置の基本原則であり, 小さな力で大きな力を取り出すのに使われている.

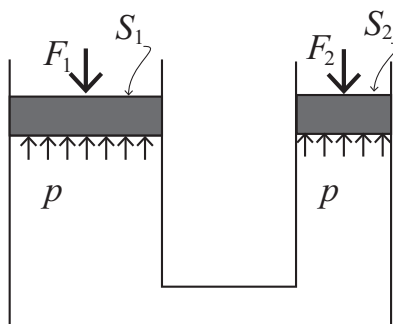


図 3.4: 油圧の原理

4. 水圧 … 静止流体中の水圧は水深に応じて大きくなることが知られている. これについて考える. 図 3.5 に鉛直上向きに z 軸をとる. この微小流塊の体積を $dz ds$ とする. この流体の密度を ρ , 重力加速度を g として, 鉛直方向の力の釣り合いは

$$-(p + dp)ds + pds - \rho g dz ds = 0 \quad (3.5)$$

これより,

$$dp = -\rho g dz \quad (3.6)$$

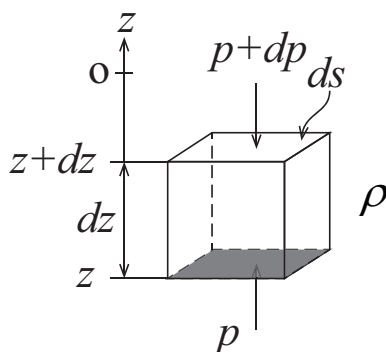


図 3.5: 鉛直方向の圧力による力の釣り合い

となる． $z = 0$ で圧力は p_{atm} であるので，上式について積分して

$$\int_p^{p_{atm}} dp = -\rho g \int_z^0 dz \quad (3.7)$$

$$p = p_{atm} - \rho g z \quad (3.8)$$

となる．水圧は水深に比例して大きくなることが示された．大気圧も同様の考えから高度が高くなるほど大気圧は小さくなる．

3.3 圧力の測定

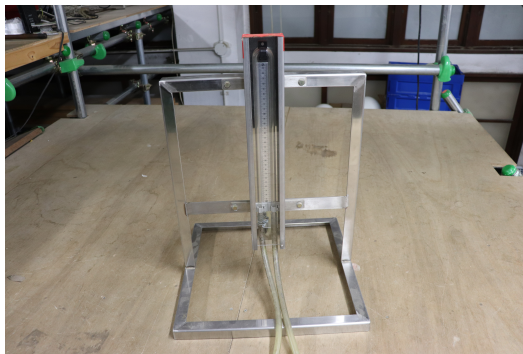
圧力の測定は主にひずみ式、液柱式等が挙げられる。

ひずみ式は例えば弾性膜をセンサー部として用いて、これにひずみゲージを貼り付けることによって圧力を一度電圧へと変換する方式のことを指す。図 3.6 に水圧を測定する圧力センサーを示す。この場合、センサー部は合成ゴムで、合成ゴムが変形するとひずみゲージにより変形を読み取る仕組みである。ひずみゲージの原理やその使い方について p.24 のコラムを参照してほしい。ひずみゲージを用いた手法の場合，電圧に対する校正 (calibration) を行うことにより圧力を逆算することとなる。



図 3.6: ひずみ式圧力計 (Marine Hydro. Lab. 所有)

液柱式の圧力測定器はマンメータとも呼ばれる。マンメータ内には水やエタノール等を入れて液柱の差を読み取ることで圧力に換算する仕組みである。図 3.7(a) に直立式の U 字管マンメータを、(b) に 30° に傾斜している U 字管マンメータを示す。(b) の傾斜式マンメータは直立式のマンメータで十分な液柱高さの差が得られない時に使うと便利である。例えば直立式のマンメータでの液柱差が 2.5 mm である時， 30° の傾斜式マンメータでの差はその 2 倍の 5 mm の差が得られるということになる。



(a) 直立式マノメータ (大阪公立大学所有)



(b) 傾斜式マノメータ (大阪公立大学所有)

図 3.7: マノメータ

図 3.8 に示すように、直立式マノメータの液柱差が h となる場合、力のつり合いから

$$p_1 - \rho gh = p_2 - \rho' gh \quad (3.9)$$

となっている。従って圧力差 $p_1 - p_2$ は

$$p_1 - p_2 = (\rho - \rho')gh \quad (3.10)$$

である。ここで、 ρ , ρ' はマノメータに入っている流体の密度であり、 g は重力加速度を表している。

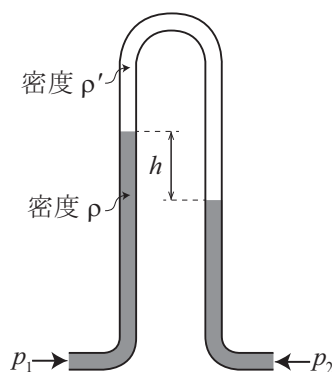


図 3.8: U 字管マノメータ

3.4 全圧力と圧力中心

代表的な例として水門を挙げ全圧や圧力中心等について考える。図 3.9 に高さ H 、幅 B の水門の模式図を示す。この水門は水門上下が固定されているとする。水門の下の押さえを取ると、右図のように原点を中心として水門は開く構造であるとする。全圧や圧力中心の代表例として水門を挙げているが、水に浸かっている板であっても考え方は同じである。さて、最初に水圧によって水門に生じる全圧力を導出してみよう。 z 軸の原点を平水面上に置き、鉛直上向きを正とする。水の密度を ρ とし、図 3.10 に示す点 A に作用する水圧 p は

$$p = -\rho gz \quad (3.11)$$

で表される。ここで、 g は重力加速度を表している。微小面積に生じる力は $-\rho gz B dz$ であるので、水門に作用する全圧力 F_T は

$$F_T = -\rho g B \int_{-H}^0 z dz = \frac{1}{2} \rho g B H^2 \quad (3.12)$$

となる。この積分は水門全域に渡っての積分である。

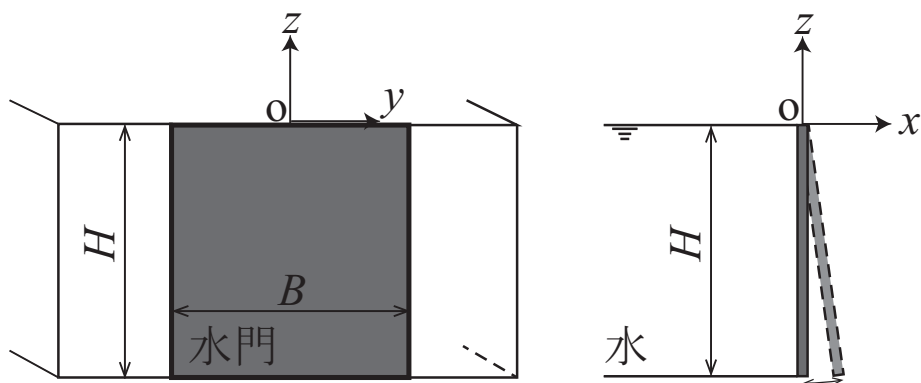


図 3.9: 水門の模式図

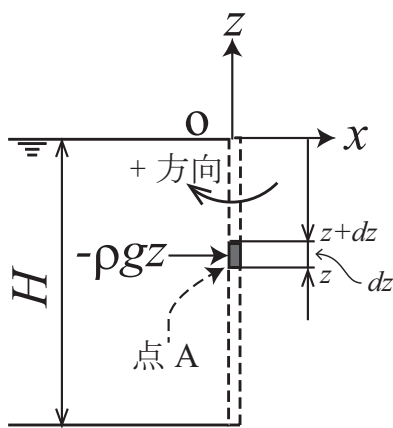


図 3.10: 水門に作用する水圧の模式図

次に、この水門の座標原点回りに生じている曲げモーメントについて考えてみる． dz 部に生じる圧力によるモーメントは $(-\rho g z)zBdz$ であり、これより $-\rho g B z^2 dz$ となる．これを $z = -H$ から $z = 0$ までを積分して

$$M_T = -\rho g B \int_{-H}^0 z^2 dz = -\frac{1}{3} \rho g B H^3 \quad (3.13)$$

となる．モーメントが負になっているのは座標軸の取り方によるものである．この場合の正方向は水門を水側に引き込む方向である．よって負となっているのは直感的にも正しい．

圧力中心について調べてみる．この圧力中心を理解しておくくと便利である．圧力中心 (z_c) とは水門に生じている全圧力の作用点と見なすことができる点である．すなわち、作用点に生じる全圧力によるモーメントと (3.13) が等しいので、以下の関係を得る．

$$F_T z_c = M_T \quad (3.14)$$

従って、この長方形断面の水門における圧力中心は

$$z_c = -\frac{2}{3} H \quad (3.15)$$

となる．

次に一般論へと拡張しよう．

図 3.11 に任意形状の水門を示す．やはり全圧力は

$$F_T = -\rho g \int_S z ds \quad (3.16)$$

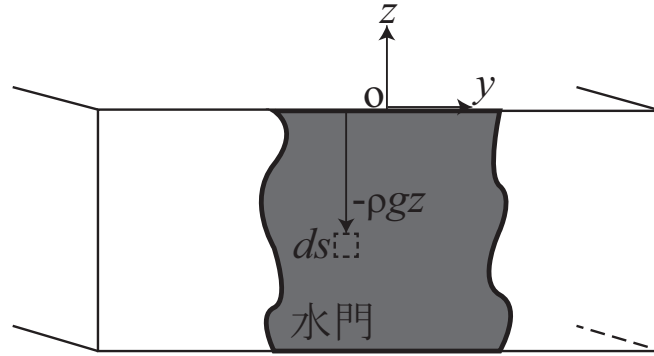


図 3.11: 任意形状の水門に作用する水圧の模式図

で計算される．圧力により板に生じるモーメントは $z = 0$ を中心として

$$M_T = -\rho g \int_S z^2 ds \quad (3.17)$$

であり，圧力中心 z_c は先程と同じ考えから

$$\bar{z}_c = \frac{\int_S z^2 ds}{\int_S z ds} \quad (3.18)$$

となる．この圧力中心も水面からの距離である．この (3.16) や (3.18) 式の分母のことを面積 1 次モーメント，(3.17) 式や (3.18) 式分子のことを面積 2 次モーメントと呼ぶ．

3.5 浮体静力学

3.5.1 アルキメデスの原理

浮体を浮かばせるために浮力を知ることがまず必要である．その次に，浮体が傾いても転倒せずに元に戻るための理屈が必要となる．船舶海洋工学分野ではよく知られる GM についてこの節では議論を深めたい．

浮力は圧力の総和として表される．図 3.12 に面積 S の立方体が沈んでいる時の様子を示す．立方体下面には水圧の総和として $F_B = \rho g z S$ の力が鉛直上向きに働き，上面には $F_D = -\rho g(z+h)S$ の力が鉛直下向きに働いている．結果として，浮力 B はこの立方体の体積を V として

$$B = F_B - F_D = \rho g h S = \rho g V \quad (3.19)$$

と表される．この B のことを浮力 (buoyancy) と呼ぶ．また，図 3.12 に示す浮体の重量と浮力とが釣り合っている状態を中性浮力の状態と呼んでいる．

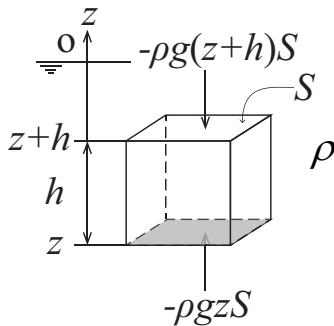


図 3.12: 浮力

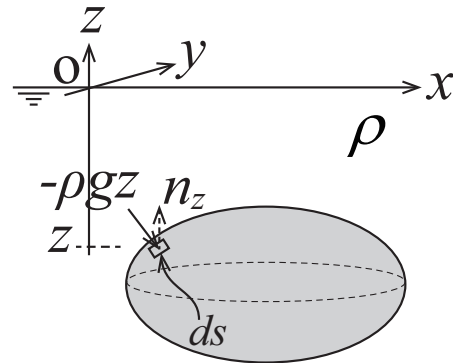


図 3.13: 任意形状の浮力

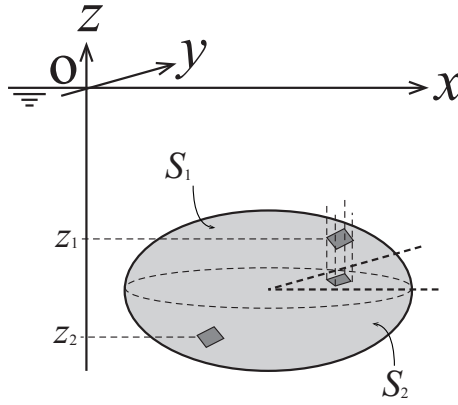


図 3.14: 任意形状の浮力算出のための概略図

もう少し浮力について一般的な定式化を行う．図 3.13 に中性浮力の状態にある任意形状の物体が液体の中に浸かっている．この物体の法線を $\mathbf{n} = (n_x, n_y, n_z)$ とすると物体に作用する浮力 F_z は

$$F_z = \int_S p n_z ds = -\rho g \int_S z n_z ds \quad (3.20)$$

となる．この積分の意味を考えるために図 3.14 に概略図を示す．浮力体の上面 ($n_z \geq 0$) を S_1 ，下面 ($n_z < 0$) を S_2 とする．この図より上面の浮体に作用する圧力と法線を含む微小積分は $p = -\rho g z_1(x, y)$ 、 $n_z ds = dxdy$ ($S \subseteq S_1$)，下面では $p = -\rho g z_2(x, y)$ 、 $n_z ds = -dxdy$ ($S \subset S_2$) であると言えるので、 F_z は

$$F_z = -\rho g \left(\int_{S_1} z_1(x, y) dxdy - \int_{S_2} z_2(x, y) dxdy \right) = \rho g \int_S \int_{z_1}^{z_2} dxdydz = \rho g \int_V dV = \rho g V \quad (3.21)$$

となる．浮力は液体に浸かっている体積に比例して大きくなるというアルキメデスの原理がここからも導出することが出来たことになる．

3.5.2 浮体の横傾斜と復原

続いて浮体が横傾斜した時に元に復原する原理について考えてみたい．この原理を理解する上で、オイラーの浮面心定理、横傾斜時の浮心の移動について述べ、復原の原理を明らかにする．

図 3.15 に示される様に、喫水 (draft) D ，幅 (breadth) B ，質量 m ，排水体積 V の浮体を実線の位置から点線で表される浮体の様に θ 横傾斜した場合を考える．質量は変わっていないので、傾斜前と傾斜後の排水量は同じであると言える．すなわち、 $\triangle a'oa \equiv \triangle bob'$ が成り立つ必要がある．この関係をオイラー (Euler) の浮面心定理と呼ぶ．浮体は浮面心を中心にして傾斜することを表している．尚、浮面心とは水線面の面積中心である．

次に横傾斜時の浮心の移動について考えてみたいと思う．浮心は浮力の作用点と見なすことが出来るので、浮体の傾斜後に浮心がどこに移動しているかが分かれば、浮体を戻そうとする力である復原モーメントの働きが分かるであろう．図 3.16 には浮体傾斜時の浮心の移動の様子を示す．図 3.15 とは違い、図 3.16 は浮体を固定して見ていることに注意されたい．すなわち、図 3.16 における $o-YZ$ は空間固定座標であり、 $o-Y$ 軸は水面に置かれている． $o-yz$ は浮体固定座標である．尚、 Z が鉛直上向きを示している． C_B, C_G は傾斜前の浮心、重心位置を表している．それぞれの座標位置を $C_B(0, z_B)$ 、 $C_G(0, z_G)$ とする． mg は浮体重量を示しており、 Z 軸負方向を向く． C'_B は浮体傾斜後の浮心位置であり $C'_B(y'_B, z'_B)$ とする．

この図 3.16 から浮体が傾斜しても元に戻る原理について直感的に考察してみたい．浮体傾斜時には浮心 C'_B に $\rho g V$ の浮力が生じる． ρ は流体密度、 g は重力加速度である． C'_B における浮力は浮体を元に戻す時計回りのモーメントを発生している．その腕の長さは重心から浮心 y'_B までの距離と言える． C_G は浮体の質量バランスによるものであり、上にものを搭載したりすることで上がる．仮に C_G が上にいき、浮力のベクトルと z 軸との交点より上になったとした

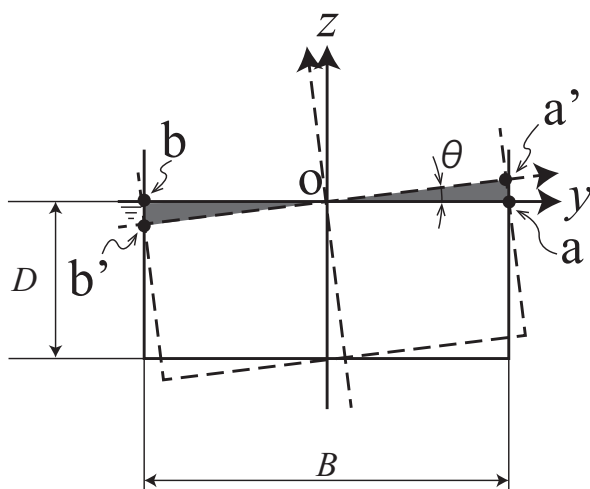


図 3.15: オイラーの浮面心定理

ら浮力は反時計回りのモーメントを発生することとなることが図からも分かる。後ほどさらに深く議論するが、この交点のことをメタセンターと呼び、重心がメタセンターより上にいくことで転倒する。逆に重心がメタセンターより下にあると浮体は安定することとなる。

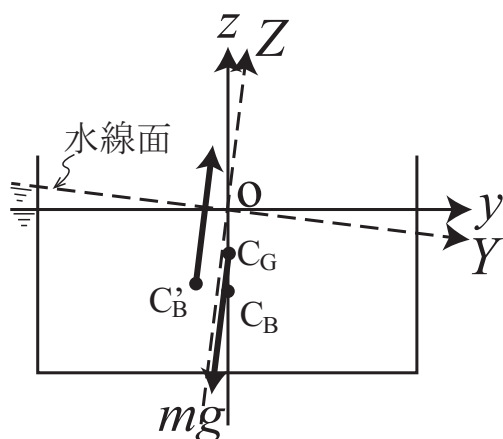


図 3.16: 浮体の傾斜による浮心の移動

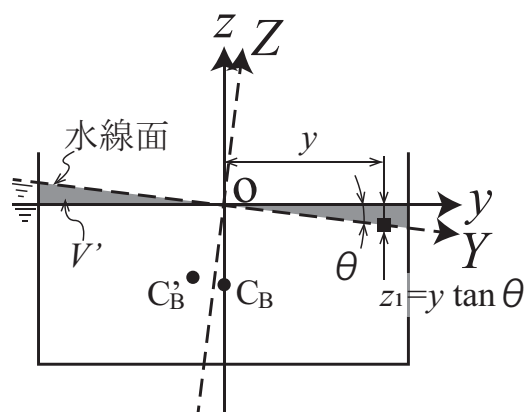


図 3.17: 浮心を求めるための積分範囲

浮心は体積一次モーメントであるから

$$z_B = \frac{1}{V} \int_V z dV \quad (3.22)$$

である。傾斜後の浮心である C'_B については,

$$(y'_B, z'_B) = \frac{1}{V} \int_{V+V'} (y, z) dV \quad (3.23)$$

で求められる。ここで V は元の水面と浮体で囲まれる部分であり、 V' は傾斜後の水面と元の水面で囲まれる部分である。 V' 部分の体積積分は鉛直方向である z 方向と水平方向について直交していると考えても差し支えない。よってこの微小体積については $dV = dzdS$ として表せば

$$(y'_B, z'_B) = \frac{1}{V} \left(\int_V (y, z) dV + \int_S \int_0^{z'} (y, z) dz dS \right) \quad (3.24)$$

となる． S は元の水線面積である．左右対称としているので， y 方向の元々の浮心は 0 であった．上式を変形して

$$(y'_B, z'_B - z_B) = \frac{1}{V} \left\{ \int_S \left(yz', \frac{1}{2} z'^2 \right) dS \right\} = \frac{1}{V} \left\{ \int_S \left(y^2 \tan \theta, \frac{1}{2} y^2 \tan^2 \theta \right) dS \right\} \quad (3.25)$$

が得られる．上式において $z' = y \tan \theta$ の関係を使っている．

ここで，

$$I_y = \int_S y^2 dS \quad (3.26)$$

とすれば，(3.25) 式は

$$y'_B = \frac{I_y}{V} \tan \theta \approx \frac{I_y}{V} \theta \quad (3.27)$$

$$z'_B - z_B = \frac{1}{2} \frac{I_y}{V} \tan^2 \theta \approx \frac{1}{2} \frac{I_y}{V} \theta^2 \quad (3.28)$$

となる．従って，

$$z'_B - z_B = \frac{1}{2} \frac{V}{I_y} y_B'^2 \quad (3.29)$$

を最終的に得る．最終的に得られたこの関係は元の浮心位置 $C_B(0, z_B)$ から $C'_B(z'_B, y'_B)$ は放物線を描くように移動することを意味している．

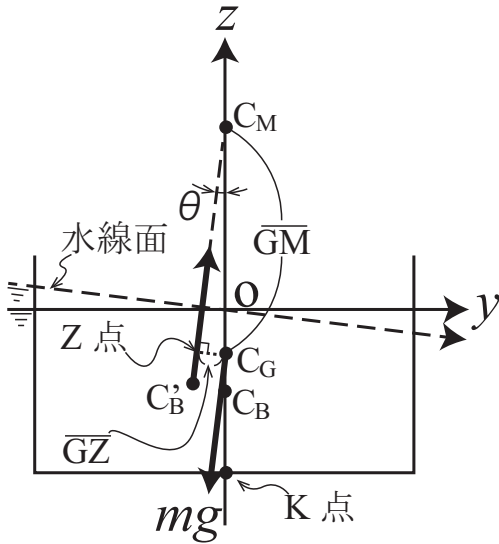


図 3.18: $\overline{GM}$

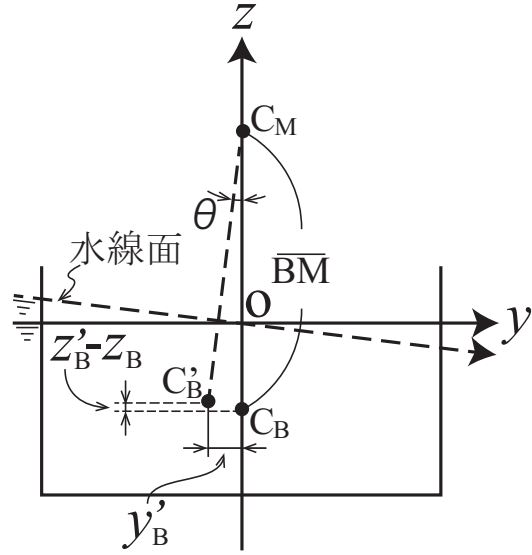


図 3.19: $\overline{BM}$

最後に浮体が復原する原理について定量的に纏めてみたい．図 3.18 に浮体が θ 傾斜した時の力学的な様子を描く． C_G は重心位置を示している．浮心は C'_B に移動するが， z 軸との交点を C_M とする．この点はメタセンターと呼ばれ，浮心の曲率中心である． $|\overrightarrow{C_M C_G}|$ のことを GM または $\overline{GM}$ と呼び浮体の安定，不安定を決定付ける． C_G が C_M より上にある状態を GM が負であると言い，この時浮体が傾斜すると転覆に至る．逆に下にある状態を正であると言い，浮体が傾斜しても復原する．この図において C_G 回りのモーメントを考えると腕の長さは C_G と Z 点との距離である．この距離のことを GZ または $\overline{GZ}$ という．復原モーメント M_g は

$$M_g = \rho g V \overline{GZ} = \rho g V \overline{GM} \sin \theta \approx \rho g V \overline{GM} \theta \quad (3.30)$$

となる．また， $\overline{GM}$ は

$$\overline{GM} = \overline{BM} - \overline{BG} = \overline{BM} - (\overline{KG} - \overline{KB}) \quad (3.31)$$

である． $\overline{KG}$ ， $\overline{KB}$ はそれぞれ浮体底部から重心までの高さ，底部から浮心までの高さである． $\overline{KG}$ は浮体の質量バランスで決まり， $\overline{KB}$ は浮体の水面下の形状で決まる．また $\overline{BM}$ は

$$\overline{BM} = \frac{y'_B}{\tan \theta} + (z'_B - z_B) \approx \frac{I_y}{V} \quad (3.32)$$

で求められる．ここで， θ^2 の項は微小であるとして省略した．

Exercise

1. 大気圧下で水銀 (比重 13.6), 水, 油 (比重 0.92) を容器に入れたところ図 3.20 に示すような状態に分離した. A 点, B 点, C 点, D 点の各点におけるゲージ圧を求めなさい.

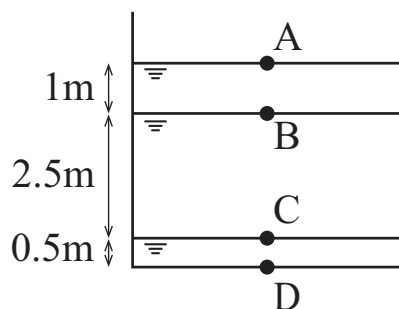


図 3.20: 問 1

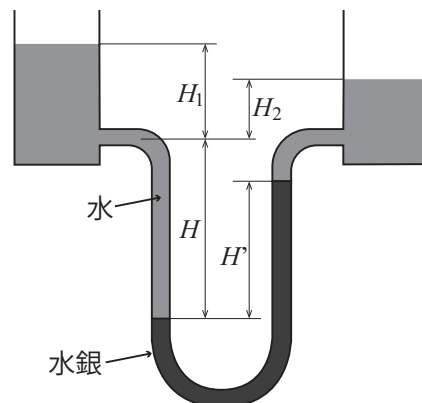


図 3.21: 問 3

2. 海において水深 50m における圧力をゲージ圧力と絶対圧力で示しなさい. 大気圧を 101.3kPa とする.
3. 図 3.21 のような状態で釣り合っている. 水銀面の高さの差 H' はどれほどか. 水の密度を ρ , 水銀の比重を s_m であるとする.
4. 図 3.22 のようなゲートについて, 支持棒に生じる力を求めなさい. ゲートの幅 (奥行) は 1 とする.

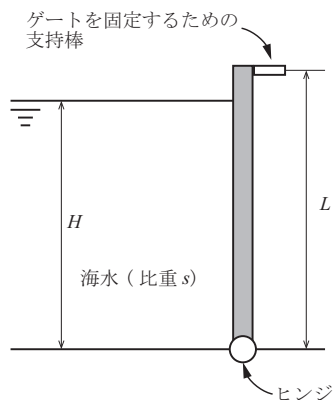
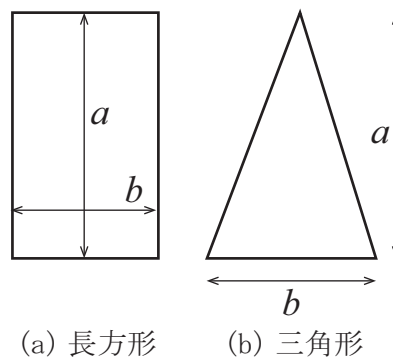


図 3.22: 問 4



(a) 長方形 (b) 三角形

図 3.23: 問 5

5. 図 3.23 に示す長方形, 三角形の図心 C の座標 z_c を求めなさい. また, 断面二次モーメントを求めなさい.
6. 図 3.24 に示すように水が T のところに行かないように長方形の板を設ける. この長方形平板の幅は 1 とする. この時, 板を支える力 F を求めなさい.
7. 厚み 10mm の鉄板を組み合わせて幅 2m, 厚み 2m, 高さ 1m の直方体を作った. 但し蓋はない. この直方体の材料は鉄である. これを水に浮かべた時の喫水 d を求めなさい. また, $\overline{GM}$ を求めなさい. この直方体に質量 m の球を図 3.25 のように質量を無視できる棒を用いて設置した. 球の重心位置は立方体底面から 1m のところにある. この立方体が安定せずに転覆する質量 m の条件を示しなさい.

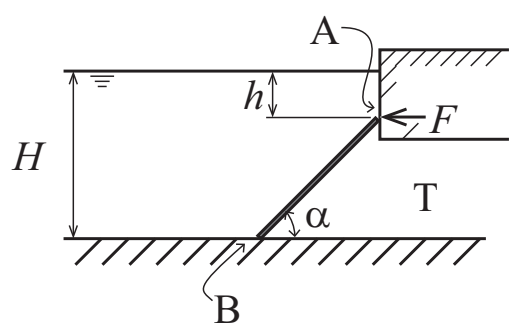


図 3.24: 問 6

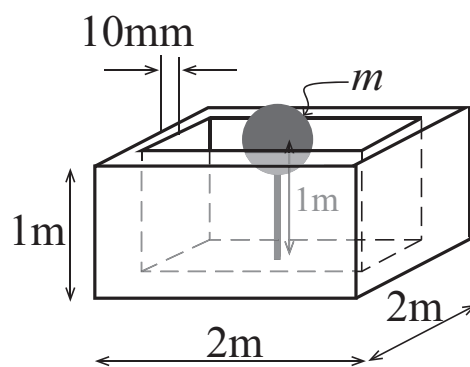
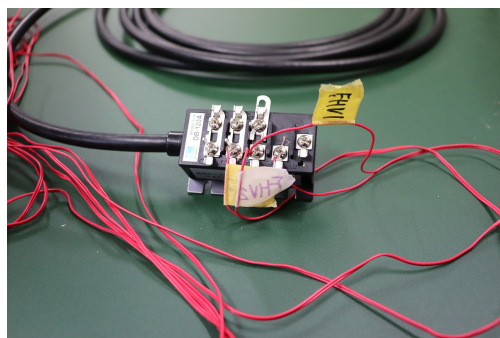
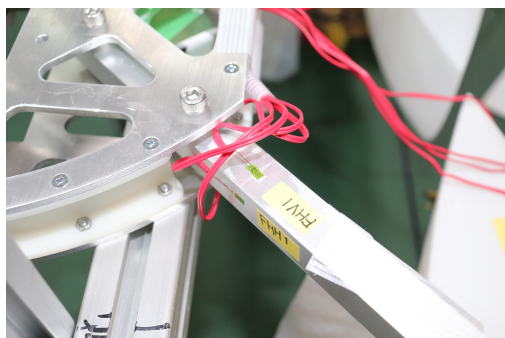


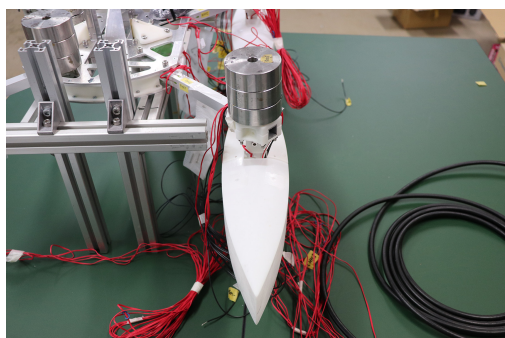
図 3.25: 問 7

ひずみゲージ (strain gauge)

材料片に抵抗体を貼り付け、材料が変形したときに抵抗体の抵抗が変化することを利用して材料片のひずみを測ることが出来る。この抵抗体をひずみゲージ (strain gauge) と言う。我々の実に様々なところで利用されている。身近なところと言うと体重計の中にもひずみゲージが入っている。下図左にひずみゲージ (緑色の部分) を示す。このひずみゲージの抵抗変化量は実際には非常に小さい。そこでブリッジ回路を組み、ひずみゲージの抵抗変化が生じた際に変化する微量電圧を増幅する方法でひずみ量を調べる手法が用いられる。下図右がブリッジ回路を組んでいるブリッジボックスである。



ひずみゲージ → ブリッジボックス → アンプという流れで機器は接続される。下図左は四胴型自動航行船の 1/3 模型のハル部上部に質量 1.5kg のおもりを載せた時の様子である。この時、下図右の様に電圧が 1.005V と表示された。波浪中を航行する場合、四胴型自動航行船はアーム部がひずむわけだが、1.005V と表示される際にはおよそ 14.7N の荷重が作用しているということを意味する。おもりを使ってどれくらいの電圧変化が生じるかを予め調べることをキャリブレーション (校正: calibration) という。



さて、波浪中のように時々刻々と電圧が変化する場合はどうしたら良いのだろうか。この場合は、データロガーというものがあり、これによりアンプの電圧を A/D (Analog / Digital) 変換し PC にデータを保存することが可能となる。

この装置を使った実験の様子は



に示されるページで閲覧可能である [12].

第 4 章

流体の基礎運動

4.1 流体運動の記述法と流体加速度の関係

流体運動の記述は2つの方法がある．一つは流体粒子の一つ一つを追跡する方法である．この手法をラグランジュ的方法という．もう一つはオイラー的方法である．この方法は流体粒子の一つ一つを追跡するのではなく，空間の各点，各瞬間の流体の状態量（流速 $\mathbf{u}$ ，圧力 p ，密度 ρ ）を固定座標系の位置と時間 (x, y, z, t) の関数として表すものである．

流体粒子一つ一つを追跡する手法であるラグランジュの手法は，観測においては粉体等のトレーサー粒子を流体内に入れて流体粒子一つ一つを捕捉する類の手法である．流れの中では注目した流体は観測点より遠方に流れていく場合もある．よって，決まった流体粒子を追跡する方法は観測が難しい場合が多い．流れの計算も無数の流体粒子がある為に難しい場合が多い．数値計算手法が進んだ昨今，ラグランジュの手法をベースにした数値計算法の一つである粒子法と呼ばれる手法が登場し様々な適用事例が増えてきている [13]．

流体力学の問題の多くはもう一方の手法であるオイラー的立場に立って多くの事例が考えられてきた．これ以降，本書はこのオイラーの手法に則る．

流体力学の目標は流れ場を明らかにすることにあると言える．即ち，各点における流体の流速 $\mathbf{u}(x, y, z, t)$ 及び圧力 $p(x, y, z, t)$ ，流体密度 $\rho(x, y, z, t)$ といった最低 5 つの未知数を支配方程式に基づき解くことに他ならない．これ以外にも例えば内燃機関内の流体問題を解くような場合は温度を求めるような場合もある．本書は海洋工学を学ぶ方向けの書であるので温度等の問題は取り扱わない．

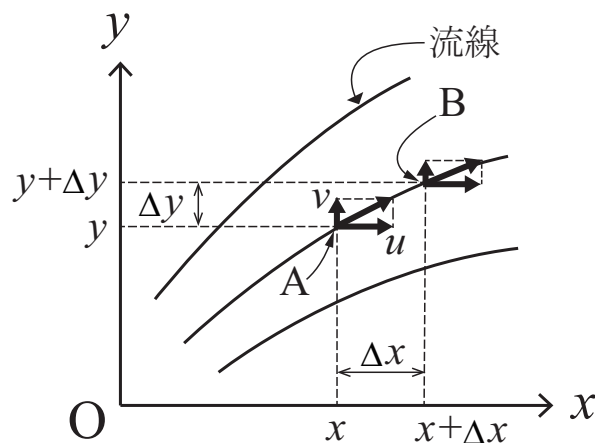


図 4.1: $t = t$ における流線

図 4.1 に示されるように，オイラー的立場に立ち A 点を通りようとする流体粒子が持つ加速度について考えてみる．二次元平面での流れ場で考えてみる．オイラー的視点に立っているのだから，流速は $\mathbf{u}(x, y, t) = (u(x, y, t), v(x, y, t))$ として表される．この時に注意すべきは流体粒子には着目しておらず，固定点である A 点を通りようする流体粒子を眺め

という事である。もし、一つの流体粒子に着目するならば加速度は

$$\frac{du}{dt} \quad (4.1)$$

となることに異論はない。オイラー的立場でも A 点において流速が $t = t$ から $t = t + \Delta t$ において変化している場合、その速度の時間変化は

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{u(x, y, t + \Delta t) - u(x, y, t)}{\Delta t} = \frac{\partial u}{\partial t} \quad (4.2)$$

で与えられる。

次に、図 4.1 に示されるように、 $t = t$ における流線について見てみよう。B 点にある粒子は $t - \Delta t$ に同一流線上の A 点にあったとする。また、 $t = t$ における B 点での x 方向流速は $u(x + \Delta x, y + \Delta y, t)$ である。A 点を通過する流体粒子の加速度は単位時間当たりの速度の変化と定義される訳であるから A 点という固定点から見た時、加速度は

$$\frac{u(x + \Delta x, y + \Delta y, t) - u(x, y, t)}{\Delta t} \quad (4.3)$$

と表される。B 点での流速は

$$u(x + \Delta x, y + \Delta y, t) \approx u(x, y, t) + \frac{\Delta u}{\Delta x} \Delta x + \frac{\Delta u}{\Delta y} \Delta y \quad (4.4)$$

であるから (4.3) は

$$\frac{u(x + \Delta x, y + \Delta y, t) - u(x, y, t)}{\Delta t} \approx \frac{\Delta u}{\Delta x} \frac{\Delta x}{\Delta t} + \frac{\Delta u}{\Delta y} \frac{\Delta y}{\Delta t} \quad (4.5)$$

となる。また、 $u = \Delta x / \Delta t$ 、 $v = \Delta y / \Delta t$ なので、最終的に加速度として

$$\lim_{\Delta x, \Delta y \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} \frac{\Delta x}{\Delta t} + \frac{\Delta u}{\Delta y} \frac{\Delta y}{\Delta t} = u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \quad (4.6)$$

が得られる。(4.2) と (4.6) とを合わせて、A 点を通過する流体粒子の加速度は

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \quad (4.7)$$

となる。このような固定点から流体の流れを観察した際の時間微分を実質微分と呼ぶ。(4.7) は x 方向の加速度であり、また二次元で考えたものである。三次元でも全く同じ事が言える。以上より x 、 y 、 z 方向の加速度は

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} \end{cases} \quad (4.8)$$

となる。

4.2 流線

流体の流れの様子を表すものが流線である。図 4.2 に流線の様子を示す。A から Δt 時間に $\Delta \mathbf{r} = (\Delta x, \Delta y, \Delta z)$ 移動しているので、

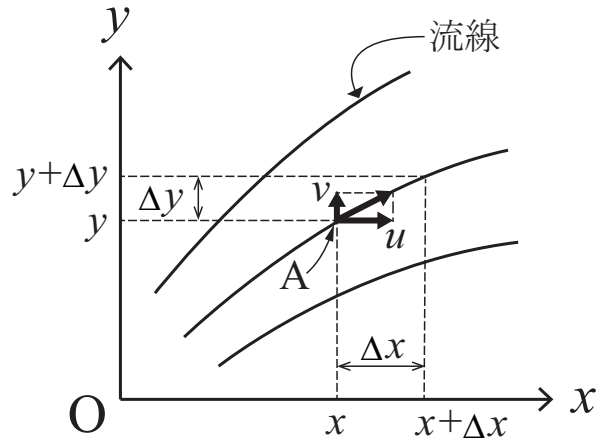
$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{u}(x, y, z, t) \quad (4.9)$$

が成り立つと言える。即ち x 、 y 、 z 方向成分に分けて考えると以下が成り立つ。

$$\frac{dx}{u(x, y, z, t)} = \frac{dy}{v(x, y, z, t)} = \frac{dz}{w(x, y, z, t)} = dt \quad (4.10)$$

これを流線の微分方程式という。

流体力学においては流線以外にも流れの道すじや色付き流線といった概念もある。詳細については文献 [14] に詳しいので参考にされたい。

図 4.2: $t = t$ における流線

4.3 流体粒子の運動

流体は変形が自由である．この節では流体がどのような運動から構成されるのかについて述べる．結果論から言うと、以下の4つの基本的な運動で構成される．

- 並進運動
- 伸び縮み
- 回転運動
- ずれ運動 (せん断変形)

これを議論する為、図 4.3 に示すように流体内 $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0$ にある任意の1つの微小流体塊に着目することとしよう．この流体塊は運動をしており、その流速 $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = (u, v, w)$ を $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0$ 周りで以下の様に Taylor 展開してみる．尚、 u は x 方向、 v は y 方向、 w は z 方向流速を示している．

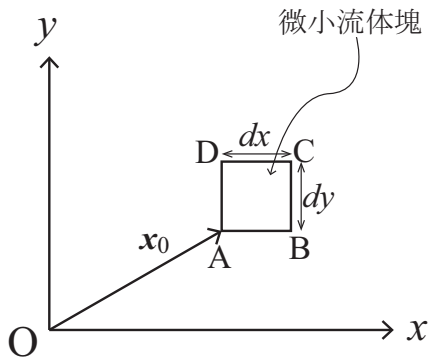


図 4.3: 流体中にある微小流体塊

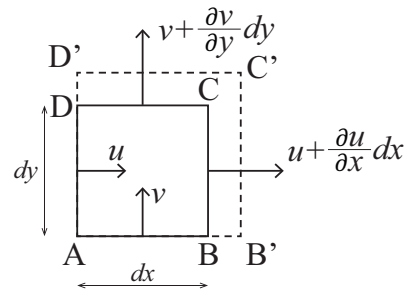


図 4.4: 微小流体塊の伸び縮み

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{u}(\mathbf{x}_0, t) + \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} \right) \Big|_{\mathbf{x}_0} (x - x_0) + \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial y} \right) \Big|_{\mathbf{x}_0} (y - y_0) + \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial z} \right) \Big|_{\mathbf{x}_0} (z - z_0) + O(x^2) \quad (4.11)$$

ここで偏微分の微係数は $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0$ における係数である。この各成分を一旦各方向成分に分解する。 $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ は各方向の単位ベクトルである。これを使って、

$$\begin{aligned} \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = & \mathbf{u}(\mathbf{x}_0, t) + a_{11}(x - x_0)\mathbf{i} + a_{12}(y - y_0)\mathbf{i} + a_{13}(z - z_0)\mathbf{i} \\ & + a_{21}(x - x_0)\mathbf{j} + a_{22}(y - y_0)\mathbf{j} + a_{23}(z - z_0)\mathbf{j} \\ & + a_{31}(x - x_0)\mathbf{k} + a_{32}(y - y_0)\mathbf{k} + a_{33}(z - z_0)\mathbf{k} \end{aligned} \quad (4.12)$$

となる。(4.12) において

$$a_{ij} = \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right)_{\mathbf{x}_0} \quad (4.13)$$

である。上式において $(u_1, u_2, u_3) = \mathbf{u}$, $(x_1, x_2, x_3) = \mathbf{x}$ を意味する。

(4.12) より、点 A では 10 種類の速度で組み合わせられる運動から成り立っていることが分かる。

では、一つ一つ整理しながら見ていこう。まず分かり易い (4.12) における $\mathbf{u}(\mathbf{x}_0, t)$ である。これは流体塊の並進運動を表している。

次に、 a_{11} , a_{22} , a_{33} の意味合いを考えてみよう。これらの係数は (4.13) から

$$a_{11} = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad a_{22} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad a_{33} = \frac{\partial w}{\partial z} \quad (4.14)$$

である。図 4.4 に 2 次元ではあるが $\partial u / \partial x$ と $\partial v / \partial y$ の意味合いを示している。この図から Δt 時間後

$$\begin{aligned} AB' &= dx + \frac{\partial u}{\partial x} dx \Delta t \\ AD' &= dy + \frac{\partial v}{\partial y} dy \Delta t \end{aligned}$$

であることが分かる。すなわち a_{11} , a_{22} , a_{33} の係数は流体の x , y , z 方向の伸び縮みの割合を表していると理解できる。この値が正であれば伸び、負であれば縮みである。

(4.12) の非対角項 (a_{ij} の $i \neq j$ の項) の持つ意味をより理解し易くするために下記のように書き改めると良いことが知られる [14]。例えば $a_{12}y\mathbf{i} + a_{21}x\mathbf{j}$ について、

$$a_{12}y\mathbf{i} + a_{21}x\mathbf{j} = \Omega_z (x\mathbf{j} - y\mathbf{i}) + \frac{1}{2}\gamma_{xy} (x\mathbf{j} + y\mathbf{i}) \quad (4.15)$$

と書き改める。ここで、

$$\Omega_z = \frac{1}{2} (a_{21} - a_{12}) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) \quad (4.16)$$

$$\gamma_{xy} = a_{21} + a_{12} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \quad (4.17)$$

である。

図 4.5 に示されるように

$$\angle B'AB + \angle D'AD = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) \Delta t = \Omega_z \Delta t \quad (4.18)$$

である。即ち、(4.16) は z 軸周りの角速度 Ω_z の回転を表している。また、図 4.6 に示されるように

$$\angle B'AB + \angle D'AD = \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) \Delta t = \gamma_{xy} \Delta t \quad (4.19)$$

となる。図 4.6 のような変形のことを純粹のずれ運動 (せん断変形) と呼ぶ。また、 γ_{xy} はせん断変形の変形速度を表している。

以上の議論を背景に (4.12) を物理的解釈がし易い形に書き換えたものが下記の式である。

$$\begin{aligned} \mathbf{u} = & \mathbf{u}(\mathbf{x}_0, t) + \Omega_x (y\mathbf{k} - z\mathbf{j}) + \frac{1}{2}\gamma_{yz} (y\mathbf{k} + z\mathbf{j}) + \epsilon_x x\mathbf{i} \\ & + \Omega_y (z\mathbf{i} - x\mathbf{k}) + \frac{1}{2}\gamma_{zx} (z\mathbf{i} + x\mathbf{k}) + \epsilon_y y\mathbf{j} \\ & + \Omega_z (x\mathbf{j} - y\mathbf{i}) + \frac{1}{2}\gamma_{xy} (x\mathbf{j} + y\mathbf{i}) + \epsilon_z z\mathbf{k} \end{aligned} \quad (4.20)$$

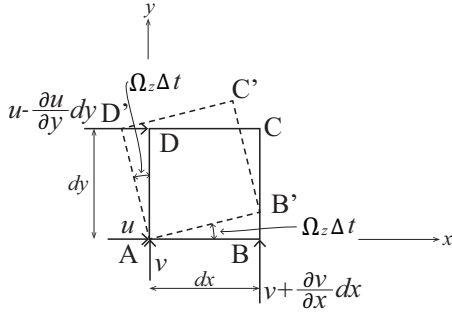


図 4.5: 微小流体塊の回転

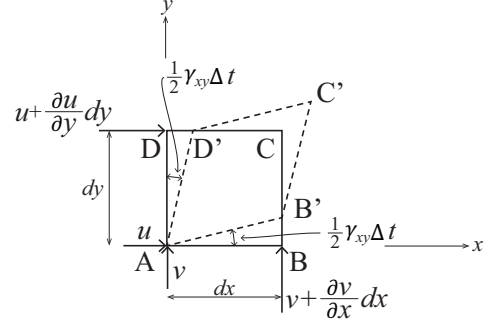


図 4.6: 微小流体塊のずれ運動 (せん断変形)

ここで,

$$\Omega_x = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \right), \quad \gamma_{yz} = \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}, \quad \epsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} \quad (4.21)$$

$$\Omega_y = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right), \quad \gamma_{zx} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}, \quad \epsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} \quad (4.22)$$

$$\Omega_z = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right), \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}, \quad \epsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} \quad (4.23)$$

である. (4.20) の $\mathbf{u}(\mathbf{x}_0, t)$ は流体塊の並進運動を表している. $\Omega_x, \Omega_y, \Omega_z$ は x, y, z 軸周りの流体回転角速度を表しており, (4.20) の Ω の項は流体塊の回転運動項である. $\gamma_{yz}, \gamma_{zx}, \gamma_{xy}$ はせん断変形速度を表しており, (4.20) の γ の項は流体塊のせん断変形項である. (4.20) における ϵ は流体塊の伸縮変形を表している. 流体における流体塊はこのように並進運動, 回転運動, ずれ運動 (せん断変形), 伸び縮みをしていると理解できる.

4.4 流量と循環

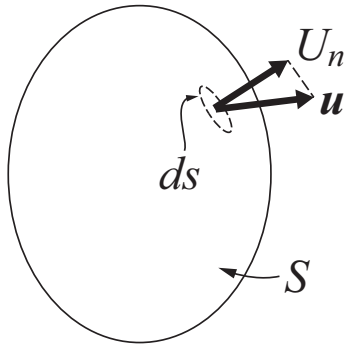


図 4.7: 流量

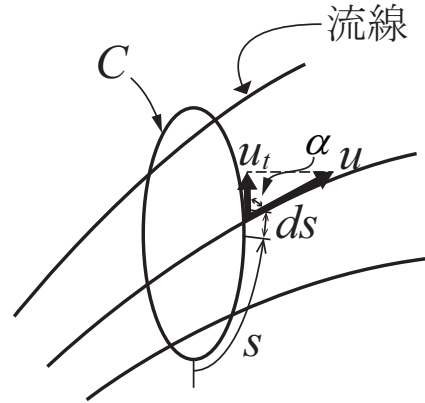


図 4.8: 周積分と循環

単位時間あたりに任意の断面を通過する流体体積を流量という. 単位は m^3/s である. 流量を Q として,

$$Q = \int_S U_n ds \quad (4.24)$$

で表される. 図 4.7 に示されるように, U_n は法線方向流速である. また, 法線ベクトルを $\mathbf{n}$ として, $U_n = \mathbf{u} \cdot \mathbf{n}$ であるから

$$Q = \int_S \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} ds \quad (4.25)$$

とも表される。

循環 Γ とは流体の渦運動の強さを代表する量である。図 4.8 に示す様に、流れの中に一つの閉曲線 C をとり、 C 上の一点 A から C に沿って長さ s を測る。 C 上の微小線要素 ds として、その接線方向流速を u_t とする。閉曲線 C に沿っての一周積分 $\Gamma(C)$

$$\Gamma(C) = \oint_C u_t ds \quad (4.26)$$

を閉曲線 C に沿う循環という。さて、図 4.8 に示す様に、流れに対しての接線流速を u とする。 $u_t = u \cos \alpha$ であるから、

$$\Gamma(C) = \oint_C u \cos \alpha ds = \oint_C \mathbf{u} \cdot d\mathbf{s} \quad (4.27)$$

が得られる。ここで、 $\mathbf{u} = (u, v, w)$, $d\mathbf{s} = (dx, dy, dz)$ である。

第 5 章

完全流体の力学

本章では流体の運動を支配する支配方程式に主眼をおいて述べる．流体の運動を議論する際に，粘性の影響を考慮すべきか否かが大きな分かれ道の一つとなる．流体摩擦のような問題を取り扱う場合は粘性の影響を考慮しなくてはならず，その場合の支配方程式は Navier Stokes(ナビエ・ストークス) 方程式を解くこととなる．一方で，粘性の影響を無視できる場合もある．このような非粘性流体を完全流体と呼ぶ．完全流体として考える代表的な事例が，海洋工学でよく取り扱われる波の問題である．また，翼の揚力の問題も完全流体として扱われる．Navier Stokes 方程式を理論的に解くことが可能な問題は限定的であり，数値流体力学が進んだ昨今，強力な計算機を用いて Navier Stokes 方程式を解くことが盛んに行われているが，問題の本質に応じて粘性の問題まで解くべきか否かは注意する必要がある．

本章では完全流体の支配方程式について主に述べる．但し，粘性の問題であっても使うことが出来る定理も中にはあるので導出過程を具に把握する必要がある．

5.1 輸送定理

流体力学における基礎方程式である連続の式や運動方程式である Euler(オイラー) の運動方程式や Navier-Stokes(ナビエ・ストークス) 方程式を導く際に輸送定理が使われるのでここで導出しておく．J. N. Newman の Marine Hydrodynamics にも詳しく説明されている [15]．さて，任意の関数 $f(\mathbf{x}, t)$ を考える．そして次の体積積分を考える．

$$I(t) = \iiint_{V(t)} f(\mathbf{x}, t) dV \quad (5.1)$$

ここで t は任意の時間を示しており， $V(t)$ は時間とともに変化する任意の流体塊である． $\mathbf{x}$ はこの流体内の位置座標である．この流体塊の境界 $S(t)$ も時間とともに変化する．そして，その法線方向の流速は $U_n(\mathbf{x}, t)$ であるとする．

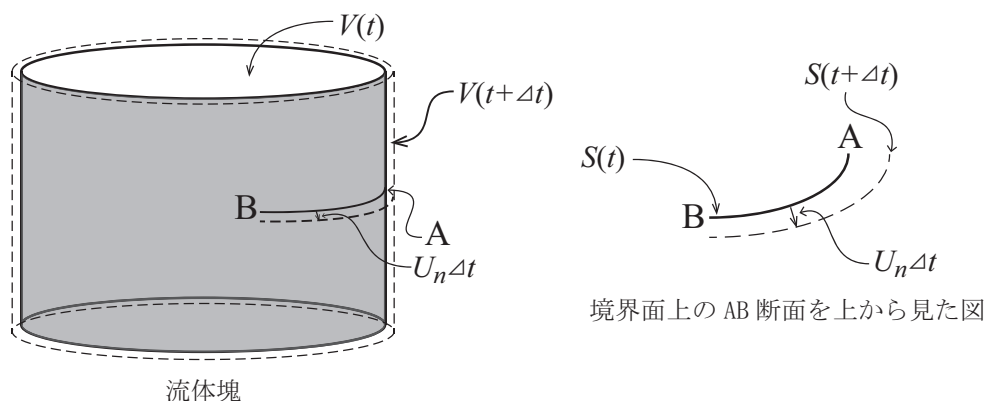


図 5.1: 輸送定理における流体塊の概念図

この体積積分 $I(t)$ の時間増分 ΔI を考えてみることにする.

$$\Delta I = I(t + \Delta t) - I(t) = \iiint_{V(t+\Delta t)} f(\mathbf{x}, t + \Delta t) dV - \iiint_{V(t)} f(\mathbf{x}, t) dV \quad (5.2)$$

となる. 関数 f の時間に関する 1 次までの Taylor 展開は

$$f(\mathbf{x}, t + \Delta t) = f(\mathbf{x}, t) + \Delta t \frac{\partial f(\mathbf{x}, t)}{\partial t} \quad (5.3)$$

となる. これを (5.2) に代入する. また, $V(t + \Delta t) = V + \Delta V$ なので

$$\begin{aligned} \Delta I &= \iiint_{V+\Delta V} \left(f + \Delta t \frac{\partial f}{\partial t} \right) dV - \iiint_V f dV \\ &= \iiint_V \Delta t \frac{\partial f}{\partial t} dV + \iiint_{\Delta V} f dV + \iiint_{\Delta V} \Delta t \frac{\partial f}{\partial t} dV \end{aligned} \quad (5.4)$$

が得られる. 次に (5.4) の右辺第 2 項, 3 項について考えよう. 図 5.1 より, Δt 時間で増えた部分の微小体積 ΔV は流体体積 V を取り囲む境界 S から Δt 時間で流出する流体塊であると理解できるので, 境界面における法線方向流速 $U_n(\mathbf{x}, t)$ を用いて

$$\iiint_{\Delta V} f dV + \iiint_{\Delta V} \Delta t \frac{\partial f}{\partial t} dV = \iint_S f(U_n \Delta t dS) + \iint_S \Delta t \frac{\partial f}{\partial t} (U_n \Delta t dS) \quad (5.5)$$

となる. 上式の右辺 2 項目は $O[\Delta t^2]$ と 2 次の微小項になるので無視できるものとする. ここから $I(t)$ の時間微分は

$$\frac{dI}{dt} = \iiint_V \frac{\partial f}{\partial t} dV + \iint_S f U_n dS \quad (5.6)$$

となる. 上式 2 項をもう少し変形していく. 境界面における法線方向流速 $U_n(\mathbf{x}, t)$ は x, y, z 方向の流速成分 $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = (u(\mathbf{x}, t), v(\mathbf{x}, t), w(\mathbf{x}, t))$ と法線の各成分 $\mathbf{n}(\mathbf{x}, t) = (n_x(\mathbf{x}, t), n_y(\mathbf{x}, t), n_z(\mathbf{x}, t))$ とを用いて

$$U_n = \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = u n_x + v n_y + w n_z \quad (5.7)$$

であるから (5.6) の右辺第 2 項は

$$\iint_S f U_n dS = \iint_S f \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} dS = \iiint_V \nabla \cdot (f \mathbf{u}) dV \quad (5.8)$$

が得られる. 第 2 式と第 3 式の移行は Gauss の発散定理を用いている.

以上より最終的に

$$\frac{d}{dt} \iiint_{V(t)} f(t) dV = \iiint_V \left\{ \frac{\partial f}{\partial t} + \nabla \cdot (f \mathbf{u}) \right\} dV \quad (5.9)$$

という関係が得られる. この関係のことを輸送定理と呼んでいる.

5.2 連続の式

流体力学の基本式の一つ目が連続の式と呼ばれるものである. 質量保存則とも呼ばれる. 本節では二つの方法でこの連続の式を導出してみようと思う. 図 5.2 に示すような微小流体塊を考える. 流体の密度を ρ とする. dt 時間内にこの流体塊に流入する流体の質量は

$$\rho u dy dz dt + \rho v dx dz dt + \rho w dx dy dt \quad (5.10)$$

と表される. 一方, 流出する流体の質量は

$$\rho \left\{ \left(u + \frac{\partial u}{\partial x} dx \right) dy dz dt + \left(v + \frac{\partial v}{\partial y} dy \right) dx dz dt + \left(w + \frac{\partial w}{\partial z} dz \right) dx dy dt \right\} \quad (5.11)$$

である. 流体塊の中の流体密度 ρ が微小時間に変化するとすれば

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} dx dy dz dt \quad (5.12)$$

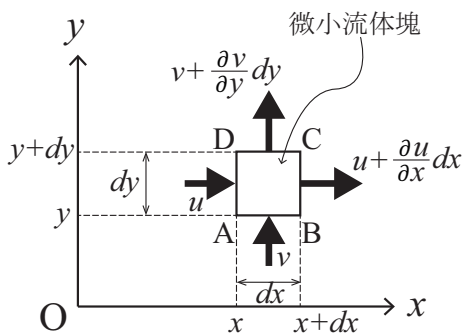


図 5.2: 微小流体塊に流入する流体

が dt 時間に増える流体の質量である．密度変化分 + 流出量 - 流入 = 0 であるので

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) = 0 \quad (5.13)$$

が得られる．(5.13) は流体の密度が変わることを考慮する圧縮性流体の場合の連続の式という．一方，流体の密度変化を無視できる場合も多い．このような流体のことを非圧縮性流体と呼ぶが，非圧縮性流体の場合の連続の式は

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (5.14)$$

となる．

5.3 Euler の運動方程式

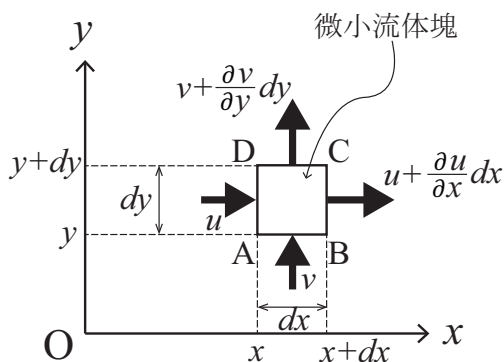


図 5.3: 微小流体塊

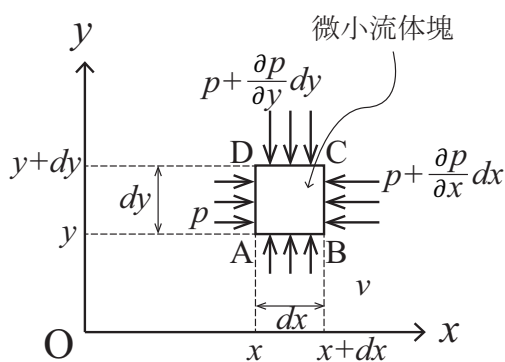


図 5.4: 微小流体塊に作用する圧力

流体力学における基礎方程式の2つ目が Euler の運動方程式である．これも2つの方法から導出してみたいと思う．前節と同様に図 5.3 に示す微小な流体塊を考える．この流体塊の質量は $\rho dx dy dz$ であるから各方向軸の運動量の時間変化は

$$\begin{cases} \frac{d\rho u}{dt} dx dy dz \\ \frac{d\rho v}{dt} dx dy dz \\ \frac{d\rho w}{dt} dx dy dz \end{cases} \quad (5.15)$$

で与えられる．図 5.4 に示すように外力は圧力， z 方向負方向に作用する重力と考えると運動方程式は

$$\begin{cases} \rho \frac{du}{dt} = -\frac{\partial p}{\partial x} \\ \rho \frac{dv}{dt} = -\frac{\partial p}{\partial y} \\ \rho \frac{dw}{dt} = -\frac{\partial p}{\partial z} - \rho g \end{cases} \quad (5.16)$$

となる．ここで左辺について考える．各方向への流速成分 $\mathbf{u} = (u, v, w)$ は時間と位置の関数であるから $u(\mathbf{x}, t)$, $v(\mathbf{x}, t), w(\mathbf{x}, t)$ である．よって，この時間微分は

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{dv}{dt} = \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial v}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{dw}{dt} = \frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial w}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} \end{cases} \quad (5.17)$$

となる．以上より，(5.16) は

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} \\ \frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} - g \end{cases} \quad (5.18)$$

となる．上式を Euler の運動方程式という．ベクトル表記で表すと

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \text{grad}) \mathbf{u} = -\frac{1}{\rho} \text{grad } p - g \mathbf{k} \quad (5.19)$$

となる．ただし $\mathbf{k} = (0, 0, 1)$ である．(5.19) の左辺項を慣性項，右辺第一項を圧力項，第二項を外力項と言う．

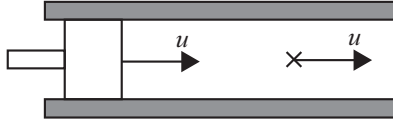


図 5.5: 非定常項

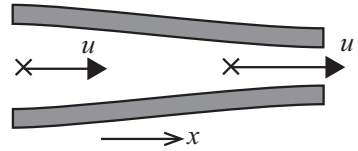


図 5.6: 対流項 1

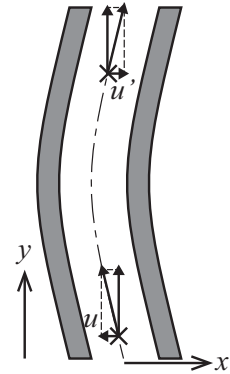


図 5.7: 対流項 2

慣性項についてさらに理解を進めよう．簡単のために (5.18) の x 方向に関する Euler の運動方程式内に現れる慣性項について考える．図 5.5 に示すように一様な太さの筒内に流体が満たされているとする．満たされている流体が非圧縮性の流体であるとする．ピストンで流体を押す際には流体はピストンと一緒に速度で動くであろう．ピストンが $\partial u / \partial t$ の加速度運動をすれば，流体も同じく加速度運動し，その大きさは $\partial u / \partial t$ となる．次に慣性項の第二項について考える．図 5.6 に示すような縮流管内を流体が流れているとする．この流れが定常な流れであっても，流れは u から u' となり流体粒子は加速運動していることが分かる．そして，その加速度の大きさは流体粒子の速度，及び位置による速度の変化 $\partial u / \partial x$ に比例して大きい．よって， $u (\partial u / \partial x)$ がその加速度の大きさとなる．次に，図 5.7 のような曲がり管を考えてみる．この図では x 方向の流速は u から u' となる．この時も流れが定常であっても x 方向の流体粒子は加速度運動していることが分かる．そして，加速度の大きさは v 及び $\partial u / \partial y$ に比例すると言える．即ち加速度の大きさは $v (\partial u / \partial y)$ である．慣性項における非定常項以外の項は対流項と呼ばれる．

5.4 流体力学における運動量保存則

一般力学において、物体の運動量が時間とともに変化する時には、その変化分に相当する力が物体に働くことが知られている。そしてこれを運動量保存則と呼んでいる。流体についてもこの運動量保存則が成り立つ。但し、流体は常に動いている為にこの運動量保存則を適用する際には注意が必要である。本節では流体力学で運動量保存則を適用する際の取り扱い方について述べる。流体中に置かれた物体に作用する流体力を求める時にはこの運動量保存則を利用すると便利である。

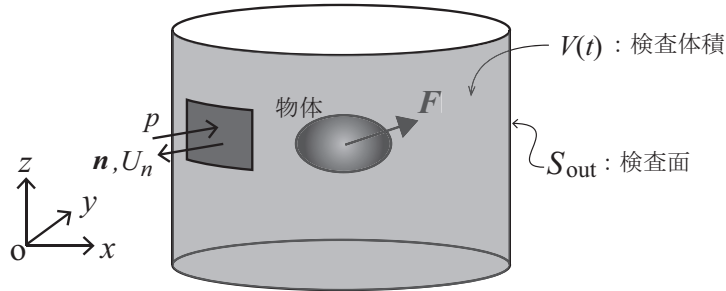


図 5.8: 流体中の物体に生じる力

今、図 5.8 のような流体中に置かれた物体に作用する流体力について考える。流体は流体全域を考えることは現実的ではないので、物体を取り囲むような任意の流体塊を考えるのが一般的である。このような任意の流体塊のことを検査体積と呼び、またその境界のことを検査面と呼ぶ。

5.1 節の輸送定理における任意の関数 $f(\mathbf{x}, t)$ をここでは $\rho \mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ としよう。 ρ は流体密度であり、 $\mathbf{u}$ は流体粒子の流速ベクトルである。 f はスカラーとして与えたが、任意の関数なので u でも v でも w でも問題ない。つまりベクトルとしても差し支えない。そうすると

$$\mathbf{I}(t) = \iiint_{V(t)} \rho \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) dV \quad (5.20)$$

は $V(t)$ における流体の各方向軸の運動量の総和と理解することが出来る。この $\mathbf{I}$ の時間変化は (5.6) で考えると分かり易く、

$$\frac{d\mathbf{I}}{dt} = \rho \iiint_V \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} dV + \rho \iint_{S_{out}} \mathbf{u} U_n dS \quad (5.21)$$

が得られる。5.1 節では一般論を導出するために S は流体領域の任意の境界であったが、ここでは S_{out} と明示している。また、 U_n は検査面での法線方向流速である。

今、物体には流体力 $\mathbf{F}$ が働いている訳であるが、これは流体の圧力の総和として力が生じていると考えることが出来る。流体を中心に考えると物体から $-\mathbf{F}$ の反作用による力を受けていることに注意をしよう。また、流体境界の S_{out} にも圧力の総和として何らかの力が生じている。よって、運動量の変化分に相当する力が流体に働いているという運動量保存則より、

$$\rho \iiint_V \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} dV + \rho \iint_{S_{out}} \mathbf{u} U_n dS = -\mathbf{F} - \iint_{S_{out}} p \mathbf{n} dS \quad (5.22)$$

が流体領域 V で成り立つ。 $\mathbf{n}$ は流体外向き法線と定義している為、 S_{out} に作用する圧力による力はマイナスとしている。これが流体力学における運動量保存則である。そして、物体が流体から受ける力 $\mathbf{F}$ は

$$\mathbf{F} = -\rho \iiint_V \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} dV - \rho \iint_{S_{out}} \mathbf{u} U_n dS - \iint_{S_{out}} p \mathbf{n} dS \quad (5.23)$$

となる。

5.5 Bernoulli の定理

質点の運動において運動方程式を積分することによってエネルギー保存則を得ることが出来る。同様の考えで流体力学においても完全流体の運動方程式を積分することによりエネルギー保存則を導くことが出来る。これを流体力学では Bernoulli(ベルヌーイ) の定理と呼ぶ。流体力学では定常流の場合のベルヌーイの定理が良く用いられる。また、海事流体力学においては例えば波の構造物への荷重を求めることが多く、この場合は非定常のベルヌーイの定理が用いられる。

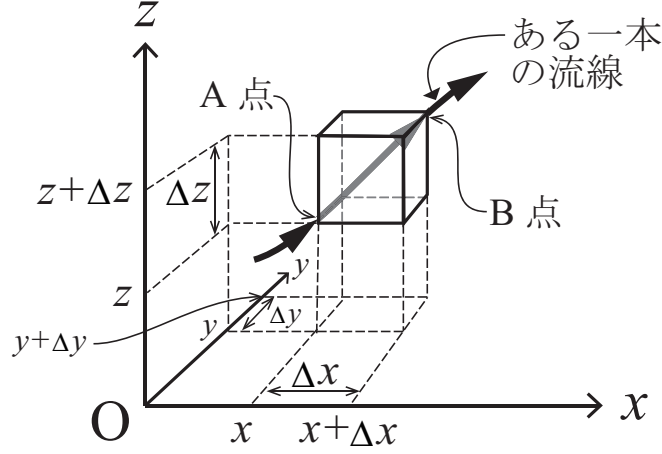


図 5.9: 流線

考える流れが定常であるとしよう。オイラーの運動方程式 (5.18) は

$$\begin{cases} u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} \\ u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} \\ u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} - g \end{cases} \quad (5.24)$$

となる。また、(4.10) に示す関係が一本の流線上では成り立つ。即ち、

$$v = u \frac{dy}{dx}, w = u \frac{dz}{dx} \quad (5.25)$$

が成り立つ。これを (5.24) の第1式に代入して

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + u \frac{dy}{dx} \frac{\partial u}{\partial y} + u \frac{dz}{dx} \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} \quad (5.26)$$

を得る。さらにこれを変形して

$$\frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial(u^2)}{\partial x} + \frac{\partial(u^2)}{\partial y} \frac{dy}{dx} + \frac{\partial(u^2)}{\partial z} \frac{dz}{dx} \right\} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} \quad (5.27)$$

となる。また、同様に流線の関係式から

$$u = v \frac{dx}{dy}, w = v \frac{dz}{dy} \quad (5.28)$$

であるから、(5.24) の第2式に代入して

$$\frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial(v^2)}{\partial x} \frac{dx}{dy} + \frac{\partial(v^2)}{\partial y} + \frac{\partial(v^2)}{\partial z} \frac{dz}{dy} \right\} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} \quad (5.29)$$

を得る．再び同様に

$$u = w \frac{dx}{dz}, v = w \frac{dy}{dz} \quad (5.30)$$

であるから，(5.24) の第3式に代入して

$$\frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial(w^2)}{\partial x} \frac{dx}{dz} + \frac{\partial(w^2)}{\partial y} \frac{dy}{dz} + \frac{\partial(w^2)}{\partial z} \right\} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} - g \quad (5.31)$$

が得られる．

今，(5.27) $\times dx$ ，(5.29) $\times dy$ ，(5.31) $\times dz$ として，3式を足すと以下を得る．

$$\frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial(U^2)}{\partial x} dx + \frac{\partial(U^2)}{\partial y} dy + \frac{\partial(U^2)}{\partial z} dz \right\} = -\frac{1}{\rho} \left\{ \frac{\partial p}{\partial x} dx + \frac{\partial p}{\partial y} dy + \frac{\partial p}{\partial z} dz \right\} - g dz \quad (5.32)$$

但し， $U^2 = u^2 + v^2 + w^2$ と定義する．(5.32) の左辺第1項の持つ意味は図 5.9 の A 点から B 点における U^2 の変化分であり，右辺第1項は A 点から B 点における圧力変化分，第2項は A 点から B 点における z 方向の位置の変化分である．即ち以下の様に見える．

$$\frac{1}{2} d(U^2) + \frac{1}{\rho} dp + g dz = 0 \quad (5.33)$$

上式を積分すると

$$\frac{1}{2} U^2 + \int \frac{dp}{\rho} + gz = \text{constant} \quad (5.34)$$

を得る．非圧縮性の流体とすれば密度は一定である為，

$$\frac{1}{2} U^2 + \frac{1}{\rho} p + gz = \text{constant} \quad (5.35)$$

となる．上式の第1項を比運動エネルギー，第2項を比圧送エネルギー，第3項を比位置エネルギーと呼ぶ．この式より1本の流線上でエネルギーの総和は一定である．

第 6 章

略解

第 2 章

1. 質量 1.026kg , 密度 1026kg/m^3 , 比重 1.026 .
2. 13540kg/m^3 .
3. $\mu \frac{2\pi dl v}{(D-d)}$.
4. $\mu \frac{\pi d^3 l \omega}{2(D-d)}$.
5. $\mu \frac{2\pi\omega}{h} \int_0^{D/2} r^3 dr = \frac{\mu\pi\omega D^4}{32h}$.
6. 0.0448% .
7. 等エントロピー変化なので質量は一定として断熱変化をしている状態である. 気体の質量を m として気体の比体積 v は $v = \frac{V}{m}$ となる. また, 比体積を用いて $K = -v \frac{dp}{dv}$. 等エントロピー変化では $pv^k = \text{一定}$ の関係であるから, $v^k dp + kp v^{k-1} dv = 0$ を得る. この関係を代入して $K = kp$ が得られる.
8. $0.9955\ldots$ (ほとんど変化しない.)

第 3 章

1. A 点 0 , B 点 9.02kPa , C 点 33.5kPa , D 点 100kPa .
2. ゲージ圧力は 499.8kPa , 絶対圧力は 601.1kPa .
3. 左右の圧力の釣り合いは $\rho g(H_1 + H) = \rho g(H_2 + H - H') + s_m \rho g H'$. よって $H' = \frac{H_1 - H_2}{s_m - 1}$.
4. z 軸の原点を海底にするとモーメントの釣り合いのみ考えれば良いので楽であるが, 敢えて本書通り水面にする. 図 6.1 に力とモーメントの模式図を示す. 水圧による全圧力 F_w は $F_w = \int_{-H}^0 (-\rho g z) dz = \rho g H^2 / 2$. モーメント M_w は $M_w = \int_{-H}^0 (-\rho g z) z dz = -\rho g H^3 / 3$. ゲートにおける力の釣り合いは $F_w - F_1 - F_2 = 0$, 原点回りのモーメントの釣り合いは $M_w - F_1(L - H) + F_2 H = 0$ となる. 連立方程式を解いて $F_1 = \frac{\rho g H^3}{6L}$.

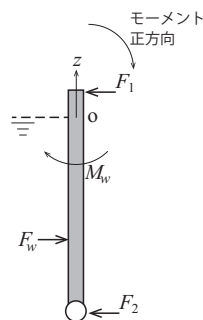


図 6.1: 問 4 の力とモーメントの模式図

5. 長方形の図心 $z_c = (1/ab) \int_{-a}^0 z b dz = -a/2$ (原点は長方形上辺の中心かつ上向き正), 断面二次モーメント $I = \int_{-a}^0 z^2 b dz = a^3 b/3$ (原点は同左). 三角形の断面一次モーメントは $(-b/a) \int_{-a}^0 z^2 dz = -a^2 b/3$ (原点は三角形の頂点かつ上向き正), よって図心は $z_c = -\frac{a^2 b}{3} \div \frac{ab}{2} = -2a/3$. 断面二次モーメント $I = (-b/a) \int_{-a}^0 z^3 dz = a^3 b/4$ (原点は同左). 問題集や教科書によっては原点が図心である場合も多いので注意が必要. また, どのような座標系にも対応できるように練習しておくが良い. 検算は平行軸の定理を用いて可能である.
6. 図 6.2 に示すように座標原点を水底に設ける. 水面に置くことも可能だが, 計算が煩雑になる. 原点まわりの水圧によるモーメント M_w は

$$M_w = \int_0^{\frac{H-h}{\sin \alpha}} \rho g (H - z' \sin \alpha) z' dz' = \frac{\rho g}{6 \sin^2 \alpha} (H - h)^2 (H + 2h)$$

となる. 原点周りのモーメントの釣り合いから

$$F = \frac{\rho g}{6 \sin^2 \alpha} (H - h) (H + 2h)$$

が得られる.

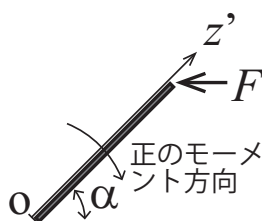


図 6.2: 問 6 の座標系

7. $d = 0.231\text{m}$, $\overline{\text{GM}} = \overline{\text{BM}} + \overline{\text{KB}} - \overline{\text{KG}} = 0.353 + 0.118 - 0.325 = 0.121\text{m}$. 質量 m の球を乗せた時の喫水を d' として, 排水体積の関係から $944.4\text{kg} + m = 4 \times 1000 \times d'$. $\overline{\text{GM}} = 0.333/(4d') + d'/2 - (316.37 + m)/(944.4 + m) < 0$ の条件から $m > 172\text{kg}$. 即ち 172kg の球を置くと転覆に至る.

参考文献

- [1] Walt Musial. Overview of floating offshore wind. National Renewable Energy Laboratory (NREL), 2020. <https://www.nrel.gov/news/video/overview-of-floating-offshore-wind-text.html>.
- [2] Yasunori Nihei, Kazuhiro Iijima, Motohiko Murai, and Tomoki Ikoma. A comparative study of motion performance of four different fowt designs in combined wind and wave loads. *33rd International Conference on Ocean, Offshore and Arctic Engineering*, No. OMAE2014-24643, pp. 1–10, 2014.
- [3] Irene Rummelhoff. World’ s first floating wind farm has started production. Technical report, equinor, 2017. <https://www.equinor.com/en/news/worlds-first-floating-wind-farm-started-production.html>.
- [4] EnergyShift 編集部. 戸田建設に聞く（２）実用化が進む洋上風力発電～戸田建設が挑む「浮体式」とは. Technical report, EnergyShift, 2019. <https://energy-shift.com/news/aa2dc32a-886c-4b85-bdd7-f3bb9b54e7de>.
- [5] 独立行政法人海事教育機構. 練習船. Technical report. <https://www.jmets.ac.jp/ship/index.html>.
- [6] 大内一之, 鶴沢潔. ウィンドチャレンジャー計画：化石燃料船から風力推進船へ. 日本船舶海洋工学会誌 KANRIN (咸臨), Vol. 63, pp. 55 – 60, 2015.
- [7] 二瓶泰範. 大阪府立大学初年次ゼミナール マリンレジャーとヨット講義資料. 2018.
- [8] 二瓶泰範, 北村眞一, 宮本一之, 外城正昭, 石井好治, 近本雅彦, 篠井隆之, 増田憲和. 船舶 特許第 6332824 号. 2017.
- [9] 二瓶泰範, 北村眞一, 外城正昭, 篠井隆之, 増田憲和. 船舶 特許第 6796292 号. 2020.
- [10] 二瓶泰範, 鶴見悠太郎, 増田憲和, 原田浩太郎, 奥野充一, 原尚之, 中田聡史. 四胴型自動航行船による高密度・高頻度な自動水質環境計測. 土木学会論文集 B1(水工学), Vol. 76, No. 2, pp. 1039–1044, 2020.
- [11] 関西造船協会. 造船設計便覧. 第 4 版. 海文堂, 1983.
- [12] 二瓶泰範. 2021 年 ロボセンアームに生じる波浪荷重試験. Technical report, Marine Hydrodynamics Laboratory, 大阪府立大学, 2021. <http://hydrodynamics.marine.osakafu-u.ac.jp/MEMORY/2021ROBOSENARM.html>.
- [13] 越塚誠一, 柴田和也, 室谷浩平. 粒子法入門. 第 4 刷. 丸善出版株式会社, 2016.
- [14] 今井功. 流体力学 (前編). 裳華房, 第 25 版, 1999.
- [15] J. N. Newman. *Marine Hydrodynamics*. The MIT Press, 1977.