

海洋工学を学ぶ人のための流体力学

Ver. 4.0

二瓶 泰範

<http://hydrodynamics.marine.omu.ac.jp/>

2024 年 9 月

目次

第 1 章	流体力学の工学への応用	1
1.1	風力発電	1
1.2	Green vessel	3
1.3	船舶	5
第 2 章	流体の物理的性質	8
2.1	流体の分類	8
2.2	次元および単位	8
2.3	粘性	9
2.4	圧縮性	9
第 3 章	静止流体の力学	12
3.1	圧力	12
3.2	圧力の性質	13
3.3	圧力の測定	14
3.4	全圧力と圧力中心	15
3.5	浮体静力学	17
第 4 章	流体の基礎運動	25
4.1	流体運動の記述法と流体加速度の関係	25
4.2	境界条件	26
4.3	流線	27
4.4	流体粒子の運動	28
4.5	流量と循環	30
第 5 章	完全流体の力学の基礎	32
5.1	輸送定理	32
5.2	連続の式	33
5.3	Euler の運動方程式	34
5.4	流体力学における運動量保存則	36
5.5	Bernoulli の定理	37
5.6	速度ポテンシャルと流れ関数と複素速度ポテンシャル	38
5.7	Blasius の公式	40
第 6 章	完全流体の力学 (2 次元編)	44
6.1	流れの基本要素	44
6.2	一様流中に置かれた円柱	49
6.3	一様流中に置かれた平板翼の揚力	52

6.4	変数分離法による Laplace 方程式の一般解	55
第 7 章	略解	57
参考文献		61

第 1 章

流体力学の工学への応用

既に多くの教科書に興味深い流体力学的現象が述べられている。現象論はそのような教科書に譲るとして、ここでは流体力学の工学的な応用先について触れてみることにする。流体力学的知見の応用は機械工学、航空工学、土木工学、環境学等々他分野においても広く為されていることは想像に難しくない。ここでは、私自身が主として研究対象としてきた風力発電、帆船に代表される Green vessel、船舶の流体力学との関係性について見てみたいと思う。

1.1 風力発電

2015 年 12 月の第 21 回気候変動枠組条約締約国会議 (COP21) でパリ協定が採択された。世界的な平均気温上昇を産業革命以前に比べ 2°C より十分低く保つとともに、 1.5°C に抑えるよう努力を続けることを目標に掲げた。また、各国は温室効果ガス (greenhouse gas:GHG) の人為的な発生源による排出と吸収源による除去量を均衡させるよう取り組むことが求められている。いわゆるカーボンニュートラルを意味している。日本ではパリ協定合意に先立つ 2015 年 7 月に 2030 年度に GHG 排出量を 2013 年度に比べ 26% 削減する目標に掲げた「日本の約束草案」を地球温暖化対策本部で決定している。長期戦略では 2050 年までに 80% の GHG 排出削減を掲げている。

風力発電は陸上での実績も多数あり、さらには洋上の風は比較的安定しており平均風速も高いことから洋上の風力発電の実用化が期待されている。洋上風力には大きく 2 つの設置工法がある。1 つが着床式であり、もう 1 つが浮体式である。水深 30m~50m くらいまでは着床式を用いることが可能である。それ以深では浮体式を用いる。



図 1.1: 浮体式風車の浮体形式 [1]

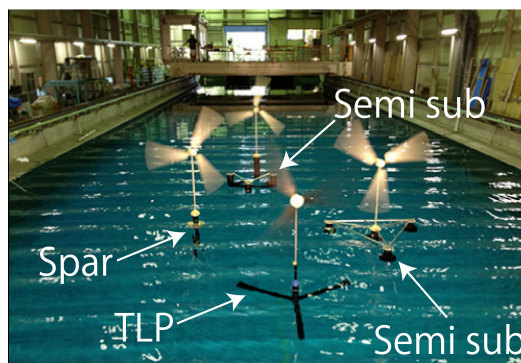


図 1.2: Nihei et al. による水槽試験 [2]

浮体式になると風車タワーから下は浮体と、係留チェーンや係留ワイヤーや係留ロープ等と、アンカーとなる。図 1.1 及び図 1.2 に浮体式風車用の浮体形式を示す。(a) スパー型 (Spar:筒), (b) セミサブ型 (Semi submersible:半潜式), (c)TLP 型 (Tension Leg Platform), (d) バージ型 (barge:箱船) に大きく分類される。一般的にスパー型は構造が単純なため製造コストを他の浮体より低く抑えることが可能である。一方で、タワー高さと同程度程度の喫水が必要とな

り使える水深に限られる．スパー型はコストが低いということもあり使用海域さえあれば商業利用が一番最初に始まる．Scotland の北東部沖合 25km の沿岸に 5 基の 6MW のスパー式風車が 2017 年から商業運転している (図 1.3 [3])．また日本でも九州五島沖で商用運転の計画が進行中である [4]．図 1.4 は五島沖の浮体式風車である．現在は 1 機浮いているが、今後数機での商用運転が始まる．



図 1.3: Scotland 沖の Hywind Scotland



図 1.4: 五島沖の浮体式風車

さて、この風力発電と流体力学の関係性について述べる．例えば風車のブレードは翼で出来ている．翼の力学は、1903 年にライト兄弟が世界最初の有人動力飛行機を発明して以来大きく進展したと言えよう．揚力や抗力の理論構築、実験による検証が進み、飛行機の実用化を通して技術的に目覚ましい進化を遂げた．その後、翼の力学は様々な所で応用されている．船や扇風機やエアコン内のプロペラも翼の応用例である．そして、上述のように近年進化を続けている風力発電も翼の技術を用いている．図 1.5 には回転する風車の翼断面を示している．翼は流れに対して垂直方向に力を発生することが出来るので図 1.5 に示すように回転方向の力を生み出すことが出来るのである．翼の力学の非常に興味深い応用事例と言えよう．

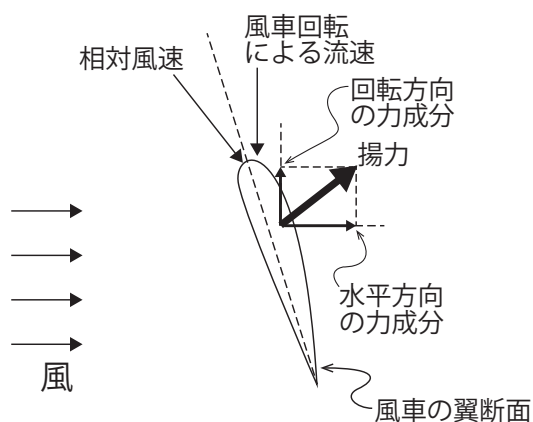


図 1.5: 風車ブレード断面の流体モデル



図 1.6: オランダキンデルダイクの風車

翼の科学的解明は確かに飛行機の技術と相まって進歩したと言えるが、実は人は古くから揚力は経験的に使っているのである．我々がオランダのキンデルダイクに見る昔ながらの風車も翼の技術を使っている (図 1.6)．また、後述することになる帆船技術もセールが生み出す揚力を利用している．船の舵も翼である．昔の船は板形状であるが、これも立派な平板翼の部類に入る．このように人類は知ってか知らずか、今となっては知る術が無いが、揚力というものを見事に使いこなしてきているのである．

さて、浮体式風車の浮体部分に着目してみたい．この浮体も流体力学的知見を応用した事例であると言えよう．まず、どうして浮かぶのか、どうして風や波の中でも元通り復原するのか．これは浮体と流体との静力学的な関係性により説明が出来る．波の浮体へ作用する力や浮体が波に与える影響、所謂相互作用も海洋工学における流体力学的な問題である．一つ一つの現象の解明なくして浮体式風車等の技術の実用化や最適化は難しいのである．流体力学の進展が進んだことにより、現在では比較的容易に浮体式風車の諸現象の解明が進んでいる．

1.2 Green vessel

近年、温室効果ガスの削減が叫ばれる時代になってきている。船舶にもその流れが来ている。古くは帆船があり、風だけの力を使って大海原を駆け巡ってきた。現代でもわが国では日本丸や海王丸 (図 1.7) に代表される帆船も運航しており、船員教育等に使われている [5]。勿論大型帆船は船員教育には不可欠であり、我が国のみならず各国でも運用されている事実は忘れてはならない。このような練習船は展帆作業や縮帆作業に多くの乗組員が必要となり、経済的にも効率的な運航が求められる現代商船において日本丸や海王丸のような大型帆船技術をそのまま使うことは難しいと言える。そこで大内等は図 1.8 に示される Wind challenger 計画を発表し [6]、日本丸や海王丸のような軟帆 (ソフトセール) ではなく、テレスコピック構造と硬帆 (ハードセール) を組み合わせたリグ (セールやマスト等のシステムの総称) を提案した。そして、これをバルクキャリアー等といった商船に搭載し大幅な燃料削減を図る技術を構築しつつある。



図 1.7: 海王丸 [5]

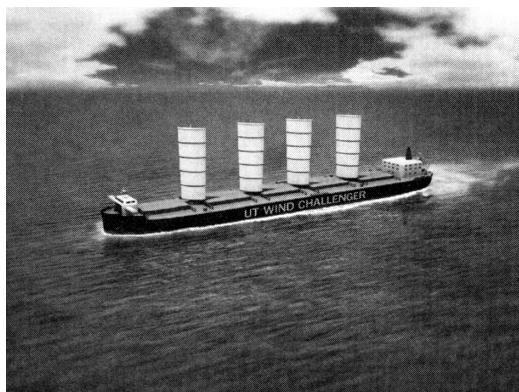


図 1.8: Wind challenger 計画 [6]

大航海時代の帆船も Wind challenger 計画もセーリングヨットも力学的には全く同じメカニズムで航行している。風下のみならず風上にも航行可能である。但し真風上には進むことは出来ないでジグザグ航行 (タッキング) しながら風上に航行させる。ヨット競技は帆船特有の操船方法と風の変化の読みを巧みにしながら行う競技であり、洋上のチェスとも呼ばれており、世界中で広く楽しまれている。図 1.9 は 470 級ヨット、図 1.10 はスナイプ級ヨットであり、学生競技ヨットの花形クラスである。



図 1.9: 470 級 (大阪府立大学体育会ヨット部写真提供)



図 1.10: スナイプ級 (大阪府立大学体育会ヨット部写真提供)

ここで、帆走船の風上帆走メカニズムを簡単に説明したいと思う。以下、二瓶による講義 (初年次ゼミナール, マリンレジャーとヨット) の資料 [7] の転載である。

定常帆走時の力の釣り合いを示した図が図 1.11 である。図 1.11 を順を追って考えてみる。(a) に、セールが生み出す揚力を成分分解したものを示している。風向が α である時、セールの揚力を推進方向 ($\sin$ 成分), 横方向 ($\cos$ 成分)

に分解することができる． $\sin$ 成分は推進力となる．また， $\cos$ 成分は横流れの成分となる．このままでは横流れが大きく，思ったように船体を推進方向に真っすぐ進めることができないであろう．

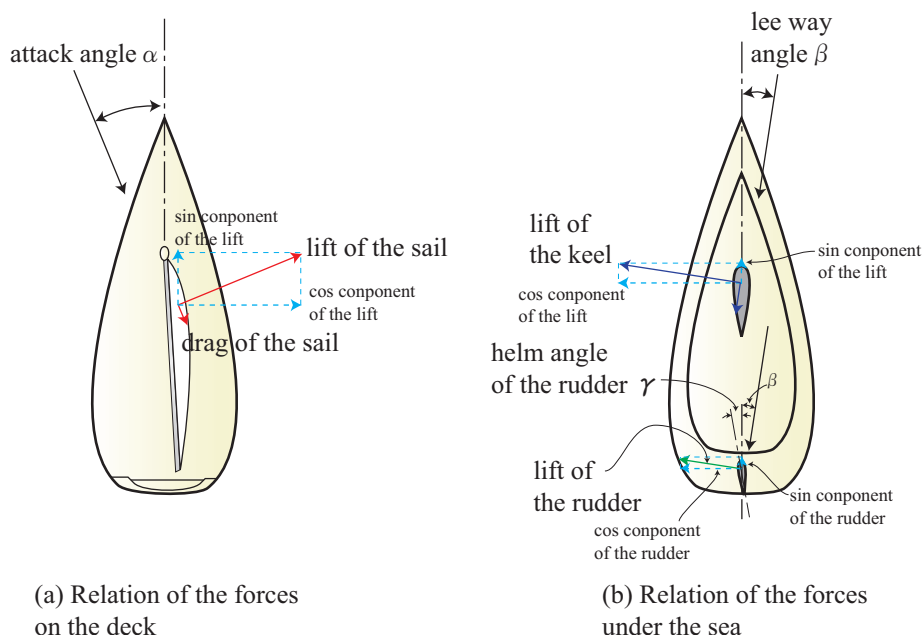


図 1.11: ヨットの風上帆走中の力学モデル [7]

次に，水面下の流体力について考えることとする．先ほど，セールの揚力が横流れを生み，推進方向に真っすぐ進めないのではないかと述べた．この問題点を解決する役割を大きく担うのがセンターキールである．舵（ラダー）もセンターキールと同じ原理でその役割を担うが，センターキールほどの翼面積はないため横流れ抑制効果はセンターキール程ではないと考えられる．これについては後述する．(b) に水流によってセンターキール及びラダーが生み出す揚力の様子を示している．船体（ハル）がセールの揚力により推進及び横流れを始めると，センターキール及びラダーに水流が生じる．これらはセールに比べて非常に小さいが，海水の密度は空気のそれに比して非常に大きいので，これらから生じる流体力はその面積が小さくとも流体力は大きい．センターキール及びラダーにはハルの推進及び横流れに伴って迎角が生じ，揚力が発生する．その揚力の $\cos$ 成分はセール揚力の $\cos$ 成分と逆向きであるため，横流れはこれによって打ち消される．しかし，これらから揚力を発生させるためにはある一定程度の迎角は必要であるのでハルは斜航しなければならない．この斜航のことを leeway（リーウェイ）と呼ぶ．いずれにしてもキール及びラダーからの揚力によって横流れが大きく抑制されるのである．

最後に定常帆走時のラダーの役割について考えてみたい．ラダーは回頭するためにあることはよく知られている．しかしセーリングヨットでは少し違う一面がある．セール，キール，ラダーそしてハルの力の作用点位置は風速によって様々に変化する．一般的にターゲットボートスピードにおいて若干のウェザーヘルムでセーリングヨットはデザインされている．ウェザーヘルムとは風上帆走時にラダーを切らない場合，風上方向にヨットが回頭することを言う．つまり，力学的にこれを見れば風上帆走時においてラダー角 γ を $0[\text{deg}]$ とした場合，セールの流体力中心が水面下流体力中心の前方にあるということである．ラダーはこのウェザーヘルム解消のために定常帆走時でも船体が目的方向に向くように若干切る必要があるのである．

ここから分かることは，セーリングヨットも揚力の特性を上手に生かしているということである．そして，セーリングヨットは大航海時代より以前から存在していた．人類は風車もそうであったように飛行機が飛ぶ前から揚力を上手に利用していたことを裏付けている．一方で科学的にはどうであったであろうか．揚力についての流体力学的な理論的体系が構築されたのは飛行機が人類史に登場した 1903 年以降であると言っても過言ではない．そしてここから我々は飛躍的に揚力の仕組みについて理解を深めることとなり，揚力等の技術を用いるセーリングヨットのみならず風車等の工学的ツールについて経験だけに依らない合理的な設計が可能になったのである．

1.3 船舶

もう一つの船舶の事例として四胴型自動航行船を紹介したい。国際的な肉・魚等の動物性たんぱく質の摂取量は飛躍的に増大しており、陸上部で生産される牛肉等のたんぱく質だけでは不足、水産資源で賄われている。その大きな担い手として養殖業がある。漁業全体の生産量が減少する中、養殖業は安定した生産量を維持し、生産額においてもその重要性が高まっており 2017 年には約 40% を占めるなど、今や養殖業は我が国水産業における一大産業であると言える。特にインバウンドに代表される国際的な日本食ブームにより、低コスト化はもとより高価格でも高品質であれば確実に需要が伸びる見通しが出てきたことは養殖業界にとって大きなフォローとなってきた。また、水産資源の減少と共に海洋環境の悪化や燃料の高騰、漁業者の高齢化や後継者不足等の問題に直面しており、益々養殖業への期待が高まっているのが現状である。

一方で、海面養殖はリスクと隣り合わせでもある。大きな原因として挙げられるのが、貧酸素水塊、低塩分水、水温上昇、貝類にとっての餌といえる植物プランクトン（クロロフィル a）の欠如、赤潮等による水質環境悪化である。最近、観測史上類を見ない台風・集中豪雨等の異常気象に起因する養殖魚介の斃死、実入りの悪化が生じ、養殖漁業に深刻かつ重大な経済的悪影響を与える事例が起きている。

養殖場のような数 km× 数 km といった広大な海域では水質に時空間分布があり、ブイや人力計測では限界がある。また、実測の詳細な計測データが存在しない為、養殖場における高密度な水質予報システムが存在していないのが現状である。そこで、二瓶らが独自に研究開発してきたのが、四胴型自動航行船 (図 1.12) である。水上ドローンと呼ばれることもある。4つの船体を持ち、これらの船体は独立に回転することができる (図 1.13)。これによって風の中での定点保持が容易になったり (特許 6332824 号 [8])、養殖場のような様々な障害物がある海域で小回りの利く操船が容易になる (特許 6796292 号 [9])。



図 1.12: 四胴型自動航行船

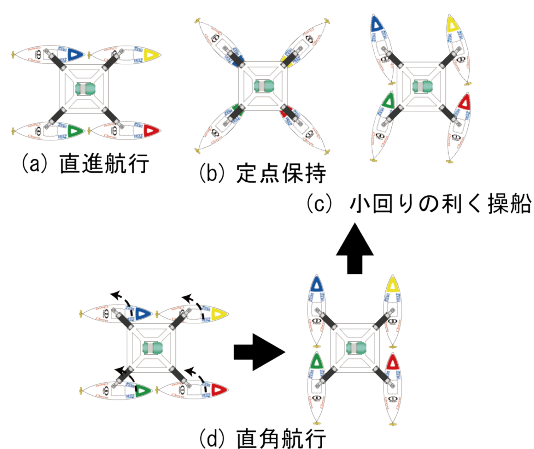


図 1.13: 船体が独立に回転することが出来、様々な操船が可能

実際の計測事例を示す。2019 年に四胴型自動航行船を使って石川県七尾西湾のカキ養殖場において自動環境計測を行った。得られた水温の鉛直断面図を図 1.15 に、計測ポイントおよび航行コースを図 1.14 に示す。計測及び周回の所要時間は 1 コースが約 2 時間半、2 コースが約 3 時間半であった。

図 1.15 は、養殖場周辺の狭い海域内においても、細かい水温構造が約一か月で劇的に変化していることを示唆している。9 月 14 日では、それまでの海面加熱によって、全体的には水深の浅い海域では高温、深い海域では低温となるような 9 月を代表する水温鉛直構造を示し、沿岸海域では一般的にみられる水温プロファイルである。ただし、1 コースより 2 コースの方が水温は高い。特に 2 コースには、海水が淀みやすい水深 2 m 以下の湾奥が存在し、地形性貯熱効果によって 30 °C 近くに達している。その水温構造が、9 月 30 日では全地点で鉛直的にほぼ一様水温 (24~25 °C) となり、台風 17 号 (9 月 23 日接近) の強風による鉛直混合によって形成された水温構造と考えられる。10 月 9 日に

なると海面冷却期に入っているため水温が低下（20～22℃）するものの、海面の方が低水温で、深くなるにつれて高水温になる水温逆転構造を示しているのが興味深い。



図 1.14: 2019 年 四胴型自動航行船による自動環境計測コース

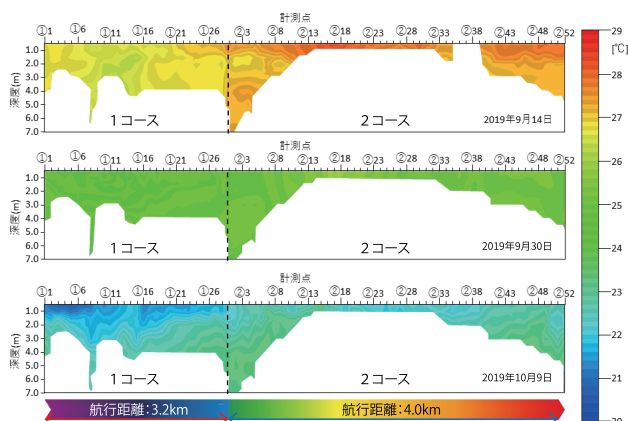


図 1.15: 1 および 2 コースにおける鉛直水温断面図

この四胴型自動航行船における流体力学との関係を少し述べてみたい。二瓶等は四胴型自動航行船の風の中での性能を明らかにしている [10]。本船の風圧下での性能は簡単な VPP (Velocity Prediction Program) を構築することにより行っている。船固定座標系における船長手方向の力のつり合い方程式を以下の式 (1.1) に示す。

$$-R_0 - X_A + (1 - t)T = 0 \quad (1.1)$$

ここで、 R_0 は船体抵抗 [N]、 X_A は上部デッキ空力抵抗 [N]、 T はプロペラ推力 [N]、 t は推力減少率である。船体抵抗及び空力抵抗は回流水槽試験、風洞試験により求め、プロペラ推力はデータベース [11]、推力減少係数は Van Lammern の推定式から求めた。各風向に対する上部デッキの船速方向の抗力を計測した風洞試験の結果を図 1.16 に示す。また各プロペラの回転数は一定、喫水は満載喫水時の半分の 10cm として計算を行った。この喫水は実海域試験時の喫水である。

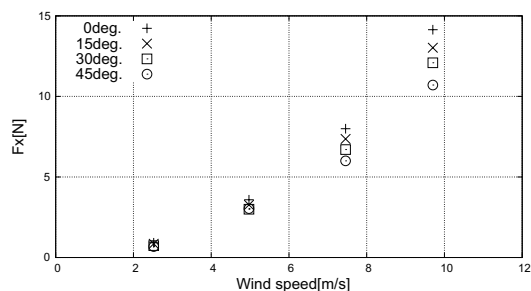


図 1.16: 上部デッキの風洞試験結果

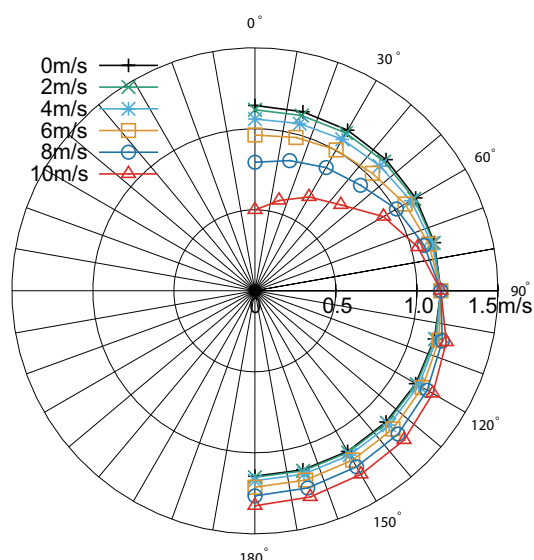


図 1.17: 四胴型自動航行船の風圧下での航行性能

図 1.17 に式 (1.1) より得られた絶対風向 (0～180°)、絶対風速 (0～10m/s) に対する船速の推定結果のポーラーカーブを示す (風が 0° 方向から来ている場合に各方向に航行する船速)。例えば風速 10m/s、風向 0° の正面向かい風中を本船が航行する場合、無風時と比べ 56% 程度船速低下がみられ航行性能に大きく影響を及ぼすことが分かった。

また風速が 1m/s 以下の実海域環境下で複数回一定時間直進航行させ、本船の船速を調査した。この実海域で得られた船速を図 1.17 の VPP による推定結果と比較した。実海域試験の船速は 0.998m/s であったのに対し、無風時の推定結果は 1.14m/s であった（ただし潮流、波等の外乱及び PID 制御に伴う抵抗の増加は考慮していない）。推定手法との誤差は 12.8% であった。船の水抵抗や上部デッキに生じる空力抵抗やプロペラ推力は全て流体力学的知見を必要とする。ここにも流体力学の応用が見て取れる。

第 2 章

流体の物理的性質

2.1 流体の分類

物質は個体、液体、気体に分類することが出来る。流体とは液体、気体に加え、プラズマの総称を指している。

個体と流体の違いは変形に対する抵抗と言える。鉄や木材は変形すると元に戻ろうとする。一方で、流体は変形しても戻らない。しかし、何かしらの変形に対して抵抗を示す。これを粘性と言う。また、圧縮に対しては圧力を増し、もとの体積に戻ろうとする。これを体積弾性と言う。この粘性と圧縮性に着目して流体の諸現象を分析することが重要となる。と言うのも、全ての影響を考慮して流体の問題を解くのが難しい場合が多いからである。結果に大きな影響を及ぼさない因子はなるべく無視し、簡素化して取り扱う。

例えば、船が波を作りながら海を航行している場合を考えよう。船は水からの抵抗を受けていることが容易に想像できる。そして、この船に作用する水からの抵抗は3つから成り立っていると考えられる。まず一つ目は船の表面と水との間の摩擦である。もう一つは船の形状に由来する抵抗である。船舶工学では圧力抵抗と呼ばれる。最後に船が波を作って航行している訳であるから、波を造る代わりに波から作用反作用の関係で抵抗を受けていると考えられる。船舶工学では造波抵抗と呼ばれる。これらの3つの流体力学的特性はそれぞれ生じるメカニズムが異なっている。例えば摩擦抵抗は水の粘性によって生じる。粘性が大きくなってくると当然ながら摩擦抵抗は大きくなる。そして、水と船の表面積が大きくなることでも摩擦抵抗は大きくなる。圧力抵抗は形状によって変わることも想像できる。これらの現象を流体力学的に解析する時には水は非圧縮性の仮定をおいて解かれるのが一般的である。本章では簡素化においてキーワードとなる流体の粘性、圧縮性について述べる。

2.2 次元および単位

全ての物理量は基本的ないくつかの量の組み合わせで成り立つ。この基本的な指数を次元または元という。流体力学はニュートン力学の延長上にあり、力学量の基本量として長さ (L)、質量 (M)、時間 (T)、温度 (θ) が用いられる。それ以外の物理量についてはこの次元の組み合わせとして表される。表 2.1 に基本量の次元と単位を示す。

表 2.1: 基本量の次元と単位 (SI 系)

量	長さ	質量	時間	温度
次元	L	M	T	θ
単位	m	kg	s	K

基本量に対して単位が定められている。国際単位系 (SI 単位) では長さに対して m、質量に対して kg、時間に対して s(秒)、温度に対しては $^{\circ}\text{C}$ (または K:ケルビン) を定めている。時間については min(分),hour(時),day(日) も使用される。

密度や圧力や力や粘度等、流体力学で用いられる物理量は基本量の組み合わせで定義される。

密度は流体 1m^3 当たりの質量のことであり単位は kg/m^3 である。密度はしばしば記号 ρ で表す。また、次元は

M/L^3 である。4 °C, 1 気圧における水の密度は $1000\text{kg}/\text{m}^3$ であり, 常温常圧の空気の密度は約 $1.2\text{kg}/\text{m}^3$ である。ある物質の密度を ρ として水の密度 ρ_w に対する比を比重 s と言う。

$$s = \frac{\rho}{\rho_w} \quad (2.1)$$

この時の水の密度は 4 °C, 1 気圧の $\rho_w = 1000\text{kg}/\text{m}^3$ を用いる。

流体力学でよく使われる単位や次元について表 2.2 にまとめる。

表 2.2: 組み合わせ量の次元と単位 (SI 系)

量	密度	力	圧力・応力	粘度	動粘度	仕事・エネルギー	仕事率・動力	ガス定数
次元	M/L^3	ML/T^2	M/LT^2	M/LT	L^2/T	ML^2/T^2	ML^2/T^3	$L^2/T^2\theta$
単位	kg/m^3	N	Pa	$\text{Pa} \cdot \text{s}$	m^2/s	J	W	$\text{J}/(\text{kg} \cdot \text{K})$

2.3 粘性

運動する流体中の物体には圧力の他に物体表面に沿って力が働く。この作用のことを粘性と呼び, この力のことを粘性力と呼ぶ。この力の大きさについて考える。図 2.1 のような面積 S , 隙間 h の平行な 2 面の板の間に流体が満たされているとする。片方の板を速度 U で動かすときには粘性力が生じるので, それと同じ力 F で押す必要がある。

この力 F の大きさは面積 S , 速度 U に比例し, 隙間の距離 h に反比例する。よって以下のような関係を得る。

$$F \propto \frac{SU}{h} \quad (2.2)$$

この時の比例定数を μ として,

$$F = \mu \frac{SU}{h} \quad (2.3)$$

が摩擦力として与えられる。この μ のことを粘度という。また, 単位面積当たりの摩擦力をせん断応力 τ と定義して

$$\tau = \frac{F}{S} = \mu \frac{U}{h} \quad (2.4)$$

となる。

粘度 μ をその流体の密度 ρ で割ったものを ν で表し動粘度という。

$$\nu = \frac{\mu}{\rho} \quad (2.5)$$

粘度の単位は $\text{Pa} \cdot \text{s}$ である。また, 動粘度の単位は m^2/s である。常温の水および空気の動粘度はそれぞれ約 $1.00 \times 10^{-6}\text{m}^2/\text{s}$, 約 $15.1 \times 10^{-6}\text{m}^2/\text{s}$ である。液体は温度が高いほど粘度は低下し, 気体はその逆となる。

通常, 速度の勾配 U/y と粘度 μ の関係は無関係であると考えてよい。このように考えられる場合をニュートン流体という。一方, 粘度 μ が速度の勾配によって変化するような性質を持つものを非ニュートン流体という。また, 図 2.2 のように速度の勾配が一定でない場合,

$$\tau = \mu \frac{du}{dz} \quad (2.6)$$

が成り立つ。

2.4 圧縮性

流体の性質を表す指標に圧縮性というものがある。図 2.3 のような体積 V のシリンダ内にある流体が入っているとす。この時の圧力を p とする。ピストンを押し込み体積 V_1 にした。そしてこの時の圧力が p_1 になったとする。圧縮性の指標として, 体積ひずみ

$$\frac{V_1 - V}{V} = \frac{dV}{V} \quad (2.7)$$

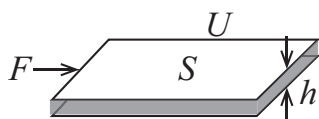


図 2.1: 平行に置かれた平板を水平方向に動かす

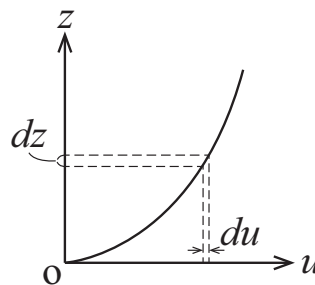


図 2.2: 速度分布が一定ではない場合

が小さい場合，圧縮しにくい流体であると言えよう．次に，圧力はどうか．

$$p_1 - p = dp \quad (2.8)$$

が大きければ大きい程，圧縮しにくい流体である．即ち

$$K = -\frac{dp}{dV/V} = -V \frac{dp}{dV} \quad (2.9)$$

が大きいと圧縮しない流体であると言える．この K のことを体積弾性係数という．

体積弾性係数は圧力と同じ次元を持つ．常温常圧の水は約 2.10GPa，常温常圧の空気では約 142kPa である． $K = \infty$ ，つまり大変圧縮しにくい流体のことを非圧縮性流体と言う．

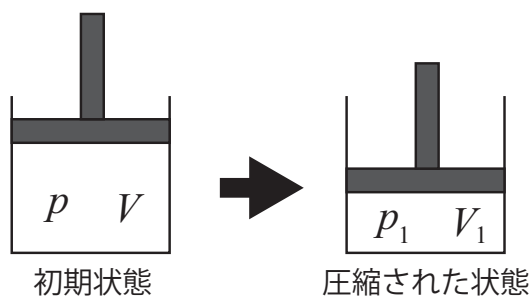


図 2.3: ピストンの状態

Exercise

1. 水 900ml とグリセリン 100ml とを混合させた液体を作った. この混合した液体の質量を求めなさい. この液体の密度, 比重を求めなさい.
2. 水銀の比重が 13.54 である時, 密度を求めなさい.
3. 下図 2.4 のように内径 D のシリンダー内に直径 d , 長さ l のピストンを同軸にはめ, 速さ v で動かすとき, ピストンとシリンダーとの間のすきまを粘度 μ の潤滑油が満たしているとすればピストンに加えるべき力 F はどれほどか.

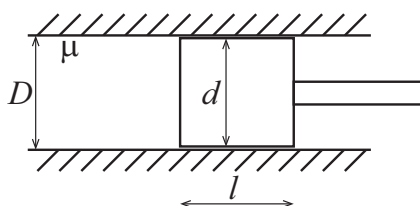


図 2.4: 問 3

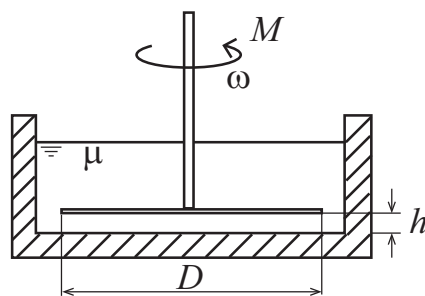


図 2.5: 問 5

4. 上図 2.4 のピストンとシリンダーの組み合わせで往復運動する代わりに軸の周りに角速度 ω で回転しているとすると, ピストンに加えるべきトルク M はどれほどか.
5. 図 2.5 のように直径 D の円盤が微小なすきま h を隔てて水槽底と向かい合っており, 中心の周りに ω で回転しているとすれば円盤に加えるべきトルク M はどれほどか.
6. ある状態での海水の体積弾性係数 $K = 2.23\text{GPa}$ であるとすれば 1MPa の圧力変化に対する体積変化は何 % か.
7. 気体が等エントロピー変化をなすとき, 体積弾性係数 K は圧力 p のみによって定まり, $K = kp$ であることを示しなさい. また, これより常圧 (101.3kPa) の気体の体積弾性係数の値を求めなさい. 但し, $k = 1.4$ とする.
8. 剛体容器の中に標準状態 101.3kPa , 温度 10°C の海水が 1L ある. 容器内の圧力を 10MPa 上昇させた際の体積を求めなさい.

第3章

静止流体の力学

本章では流体力学の基本ともいべき静止流体の力学について考えてみたい。流体の運動を考えるうえで圧力のことを考えることがとても重要である。ここでは、圧力の定義から始め、圧力の性質、圧力の測定方法について述べる。我々の周りにはダムや水門がある。これらは基本的には静止流体の応用事例であると言える。本章では水門を事例として全圧力や圧力中心といったものについて考えてみたいと思う。本章の最後で扱うのが浮体静力学の問題である。船や石油リグや浮体式風車等々、海に浮かぶものは転覆しないように設計されている。どうして転覆しないのだろうか。これを浮体静力学は明確に教えてくれる。本章ではこれを解き明かす鍵となる浮心の移動や GM ということについて考察してみたい。

3.1 圧力

流体内の各部は互いに力を及ぼして押し合っている状態にある。これを圧力という。図 3.1 のように流体内に考えた面積 Δs の断面に垂直に生じる力の大きさを ΔP とする時、

$$p = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta P}{\Delta s} = \frac{dP}{ds} \quad (3.1)$$

を圧力という。

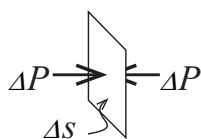


図 3.1: 圧力の定義

力の単位を N, 面積の単位を m^2 とすれば、圧力の単位は $Pa (= N/m^2)$ である。 $kPa (= 10^3 Pa)$ や $MPa (= 10^6 Pa)$ もよく使われる。また、大気圧の単位として気圧を用いることもある。1 標準気圧 (1atm) は $101.325 kPa$ である。

圧力を表すとき、大気圧 p_{atm} を基準にしたゲージ圧 p_{gauge} と完全真空を基準にした絶対圧 p_{abs} がある。両者の関係は

$$p_{abs} = p_{atm} + p_{gauge} \quad (3.2)$$

で表される。Gauge は計器という意味であり、ここら分かるようにゲージ圧は計測器で測った圧力である。但し、これは水圧計のような機器には当てはまらないので注意が必要である。水圧計は計測器であるのでゲージ圧と言うこともできるが、大気圧を含んだ形で圧力を計測しているので絶対圧を計測していることになる。

3.2 圧力の性質

1. 点に生じる圧力 … ある点での圧力は全ての方向に等しい大きさで作用する. (図 3.2)

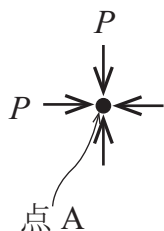


図 3.2: ある点 A に生じる圧力 P

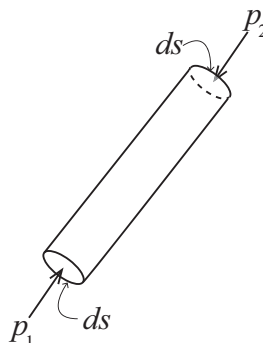


図 3.3: パスカルの原理

2. 面に作用する圧力 … 圧力は平面や局面の法線方向（垂直）に作用する.
3. 圧力の伝達 … 密閉された容器の中の流体の一部に加えられた圧力は容器内の流体の全ての部分に伝達される. これをパスカルの原理という. 図 3.3 に示すように流体内に仮想的な断面 ds の円筒を考え, その力の釣り合いを考えると $p_1 ds = p_2 ds$ であるので, $p_1 = p_2$ となる. このように, 重力の影響を除いて静止流体中では圧力は流体の全ての部分にそのまま伝達される. これを応用したものとして図 3.4 のような流体を密閉した容器を考える. F_1 , F_2 の力を上からかける. この状態で釣り合っている時を考える. 流体内の圧力はそのまま伝達されるので,

$$p = \frac{F_1}{S_1} = \frac{F_2}{S_2} \quad (3.3)$$

が成り立つ. ここから

$$F_1 = F_2 \frac{S_1}{S_2} \quad (3.4)$$

が得られる. すなわち, 断面積の大きい側は大きな力を受けることができる. これは油圧装置の基本原則であり, 小さな力で大きな力を取り出すのに使われている.

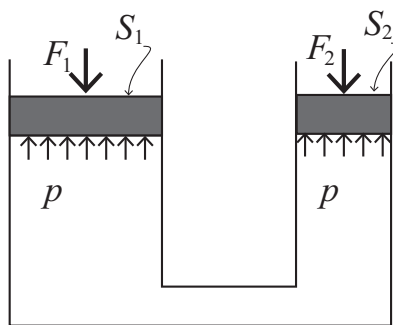


図 3.4: 油圧の原理

4. 水圧 … 静止流体中の水圧は水深に応じて大きくなることが知られている. これについて考える. 図 3.5 に鉛直上向きに z 軸をとる. この微小流塊の体積を $dz ds$ とする. この流体の密度を ρ , 重力加速度を g として, 鉛直方向の力の釣り合いは

$$-(p + dp)ds + pds - \rho g dz ds = 0 \quad (3.5)$$

これより,

$$dp = -\rho g dz \quad (3.6)$$

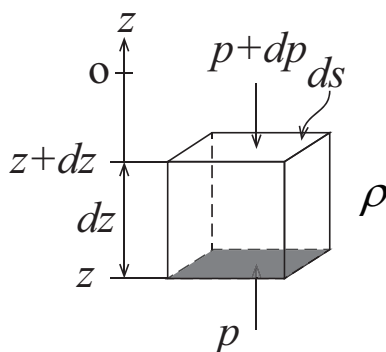


図 3.5: 鉛直方向の圧力による力の釣り合い

となる． $z = 0$ で圧力は p_{atm} であるので，上式について積分して

$$\int_p^{p_{atm}} dp = -\rho g \int_z^0 dz \quad (3.7)$$

$$p = p_{atm} - \rho g z \quad (3.8)$$

となる．水圧は水深に比例して大きくなることが示された．大気圧も同様の考えから高度が高くなるほど大気圧は小さくなる．

3.3 圧力の測定

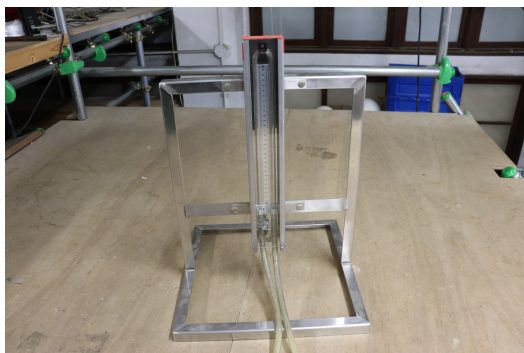
圧力の測定は主にひずみ式、液柱式等が挙げられる。

ひずみ式は例えば弾性膜をセンサー部として用いて、これにひずみゲージを貼り付けることによって圧力を一度電圧へと変換する方式のことを指す。図 3.6 に水圧を測定する圧力センサーを示す。この場合、センサー部は合成ゴムで、合成ゴムが変形するとひずみゲージにより変形を読み取る仕組みである。ひずみゲージの原理やその使い方について p.24 のコラムを参照してほしい。ひずみゲージを用いた手法の場合、電圧に対する校正 (calibration) を行うことにより圧力を逆算することとなる。



図 3.6: ひずみ式圧力計 (Marine Hydro. Lab. 所有)

液柱式の圧力測定器はマンメータとも呼ばれる。マンメータ内には水やエタノール等を入れて液柱の差を読み取ることにより圧力に換算する仕組みである。図 3.7(a) に直立式の U 字管マンメータを、(b) に 30° に傾斜している U 字管マンメータを示す。(b) の傾斜式マンメータは直立式のマンメータで十分な液柱高さの差が得られない時に使うと便利である。例えば直立式のマンメータでの液柱差が 2.5 mm である時、 30° の傾斜式マンメータでの差はその 2 倍の 5 mm の差が得られるということになる。



(a) 直立式マノメータ (大阪公立大学所有)



(b) 傾斜式マノメータ (大阪公立大学所有)

図 3.7: マノメータ

図 3.8 に示すように、直立式マノメータの液柱差が h となる場合、力のつり合いから

$$p_1 - \rho gh = p_2 - \rho' gh \quad (3.9)$$

となっている。従って圧力差 $p_1 - p_2$ は

$$p_1 - p_2 = (\rho - \rho')gh \quad (3.10)$$

である。ここで、 ρ 、 ρ' はマノメータに入っている流体の密度であり、 g は重力加速度を表している。

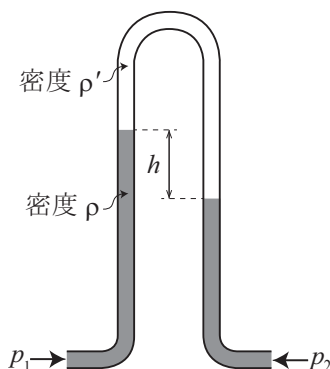


図 3.8: U 字管マノメータ

3.4 全圧力と圧力中心

代表的な例として水門を挙げ全圧や圧力中心等について考える。図 3.9 に高さ H 、幅 B の水門の模式図を示す。この水門は水門上下が固定されているとする。水門の下を押さえを取ると、右図のように原点を中心として水門は開く構造であるとする。全圧や圧力中心の代表例として水門を挙げているが、水に浸かっている板であっても考え方は同じである。さて、最初に水圧によって水門に生じる全圧力を導出してみよう。 z 軸の原点を平水面上に置き、鉛直上向きを正とする。水の密度を ρ とし、図 3.10 に示す点 A に作用する水圧 p は

$$p = -\rho gz \quad (3.11)$$

で表される。ここで、 g は重力加速度を表している。微小面積に生じる力は $-\rho gz B dz$ であるので、水門に作用する全圧力 F_T は

$$F_T = -\rho g B \int_{-H}^0 z dz = \frac{1}{2} \rho g B H^2 \quad (3.12)$$

となる。この積分は水門全域に渡っての積分である。

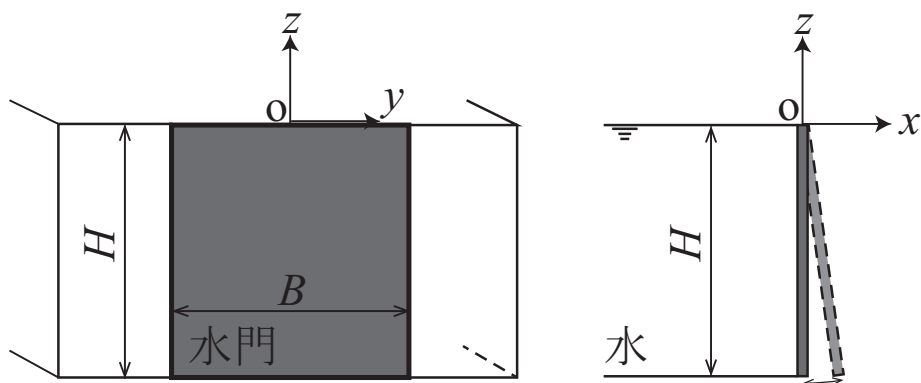


図 3.9: 水門の模式図

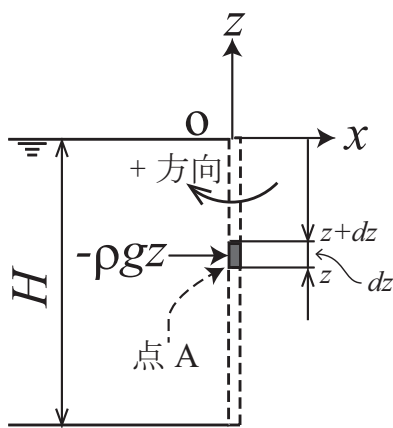


図 3.10: 水門に作用する水圧の模式図

次に、この水門の座標原点回りに生じている曲げモーメントについて考えてみる． dz 部に生じる圧力によるモーメントは $(-\rho g z)zBdz$ であり、これより $-\rho g B z^2 dz$ となる．これを $z = -H$ から $z = 0$ までを積分して

$$M_T = -\rho g B \int_{-H}^0 z^2 dz = -\frac{1}{3} \rho g B H^3 \quad (3.13)$$

となる．モーメントが負になっているのは座標軸の取り方によるものである．この場合の正方向は水門を水側に引き込む方向である．よって負となっているのは直感的にも正しい．

圧力中心について調べてみる．この圧力中心を理解しておくとう便利である．圧力中心 (z_c) とは水門に生じている全圧力の作用点と見なすことができる点である．すなわち、作用点に生じる全圧力によるモーメントと (3.13) が等しいので、以下の関係を得る．

$$F_T z_c = M_T \quad (3.14)$$

従って、この長方形断面の水門における圧力中心は

$$z_c = -\frac{2}{3} H \quad (3.15)$$

となる．

次に一般論へと拡張しよう．

図 3.11 に任意形状の水門を示す．やはり全圧力は

$$F_T = -\rho g \int_S z ds \quad (3.16)$$

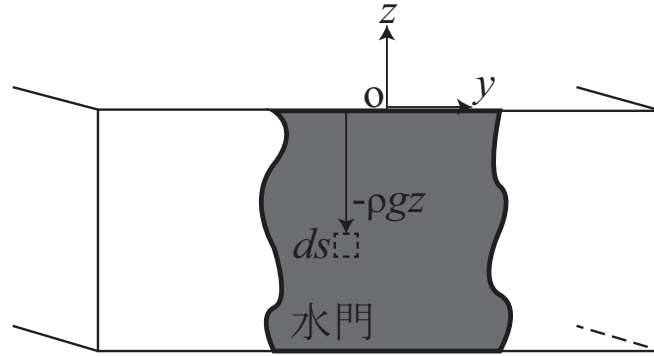


図 3.11: 任意形状の水門に作用する水圧の模式図

で計算される．圧力により板に生じるモーメントは $z = 0$ を中心として

$$M_T = -\rho g \int_S z^2 ds \quad (3.17)$$

であり，圧力中心 z_c は先程と同じ考えから

$$\bar{z}_c = \frac{\int_S z^2 ds}{\int_S z ds} \quad (3.18)$$

となる．この圧力中心も水面からの距離である．この (3.16) や (3.18) 式の分母のことを面積 1 次モーメント，(3.17) 式や (3.18) 式分子のことを面積 2 次モーメントと呼ぶ．

3.5 浮体静力学

3.5.1 アルキメデスの原理

浮体を浮かばせるために浮力を知ることがまず必要である．その次に、浮体が傾いても転倒せずに元に戻るための理屈が必要となる．船舶海洋工学分野ではよく知られる GM についてこの節では議論を深めたい．

浮力は圧力の総和として表される．図 3.12 に面積 S の立方体が沈んでいる時の様子を示す．立方体下面には水圧の総和として $F_B = \rho g z S$ の力が鉛直上向きに働き、上面には $F_D = -\rho g(z + h)S$ の力が鉛直下向きに働いている．結果として、浮力 B はこの立方体の体積を V として

$$B = F_B - F_D = \rho g h S = \rho g V \quad (3.19)$$

と表される．この B のことを浮力 (buoyancy) と呼ぶ．また、図 3.12 に示す浮体の重量と浮力が釣り合っている状態を中性浮力の状態と呼んでいる．

もう少し浮力について一般的な定式化を行う．図 3.13 に中性浮力の状態にある任意形状の物体が液体の中に浸かっている．この物体の法線を $\mathbf{n} = (n_x, n_y, n_z)$ とすると物体に作用する浮力 F_z は

$$F_z = \int_S p n_z ds = -\rho g \int_S z n_z ds \quad (3.20)$$

となる．この積分の意味を考えるために図 3.14 に概略図を示す．浮力体の上面 ($n_z \geq 0$) を S_1 ，下面 ($n_z < 0$) を S_2 とする．この図より上面の浮体に作用する圧力と法線を含む微小積分は $p = -\rho g z_1(x, y)$ 、 $n_z ds = dxdy$ ($S \subseteq S_1$)，下面では $p = -\rho g z_2(x, y)$ 、 $n_z ds = -dxdy$ ($S \subseteq S_2$) であると言えるので、 F_z は

$$F_z = -\rho g \left(\int_{S_1} z_1(x, y) dxdy - \int_{S_2} z_2(x, y) dxdy \right) = \rho g \int_S \int_{z_1}^{z_2} dxdydz = \rho g \int_V dV = \rho g V \quad (3.21)$$

となる．浮力は液体に浸かっている体積に比例して大きくなるというアルキメデスの原理がここからも導出することが出来たことになる．

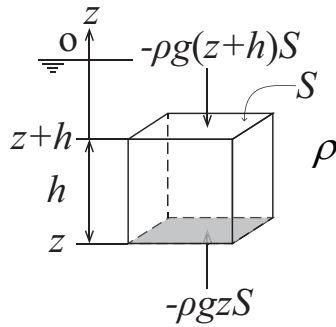


図 3.12: 浮力

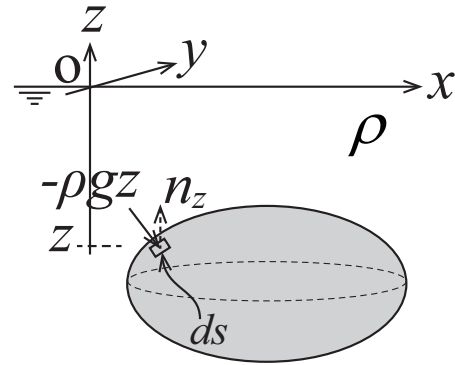


図 3.13: 任意形状の浮力

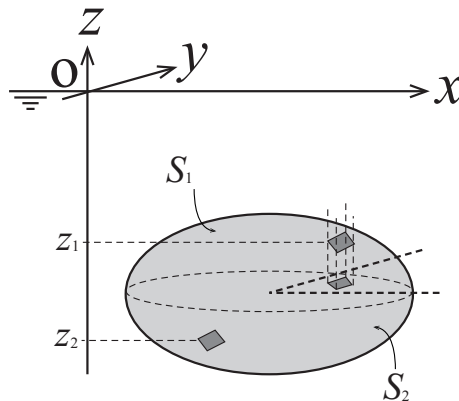


図 3.14: 任意形状の浮力算出のための概略図

3.5.2 浮体の横傾斜と復原

続いて浮体が横傾斜した時に元に復原する原理について考えてみたい。この原理を理解する上で、オイラーの浮面心定理、横傾斜時の浮心の移動について述べ、復原の原理を明らかにする。

図 3.15 に示される様に、喫水 (draft) D 、幅 (breadth) B 、質量 m 、排水体積 V の浮体を実線の位置から点線で表される浮体の様に θ 横傾斜した場合を考える。質量は変わっていないので、傾斜前と傾斜後の排水量は同じであると言える。すなわち、 $\triangle a'oa \equiv \triangle bob'$ が成り立つ必要がある。この関係をオイラー (Euler) の浮面心定理と呼ぶ。浮体は浮面心を中心にして傾斜することを表している。尚、浮面心とは水線面の面積中心である。

次に横傾斜時の浮心の移動について考えてみたいと思う。浮心は浮力の作用点と見なすことが出来るので、浮体の傾斜後に浮心がどこに移動しているかが分かれば、浮体を戻そうとする力である復原モーメントの働きが分かるであろう。図 3.16 には浮体傾斜時の浮心の移動の様子を示す。図 3.15 とは違い、図 3.16 は浮体を固定して見ていることに注意されたい。すなわち、図 3.16 における $o-YZ$ は空間固定座標であり、 $o-Y$ 軸は水面に置かれている。 $o-yz$ は浮体固定座標である。尚、 Z が鉛直上向きを示している。 C_B, C_G は傾斜前の浮心、重心位置を表している。それぞれの座標位置を $C_B(0, z_B)$, $C_G(0, z_G)$ とする。 mg は浮体重量を示しており、 Z 軸負方向を向く。 C'_B は浮体傾斜後の浮心位置であり $C'_B(y'_B, z'_B)$ とする。

この図 3.16 から浮体が傾斜しても元に戻る原理について直感的に考察してみたい。浮体傾斜時には浮心 C'_B に $\rho g V$ の浮力が生じる。 ρ は流体密度、 g は重力加速度である。 C'_B における浮力は浮体を元に戻す時計回りのモーメントを発生している。その腕の長さは重心から浮心 y'_B までの距離と言える。 C_G は浮体の質量バランスによるものであり、上にものを搭載したりすることで上がる。仮に C_G が上にいき、浮力のベクトルと z 軸との交点より上になったとした

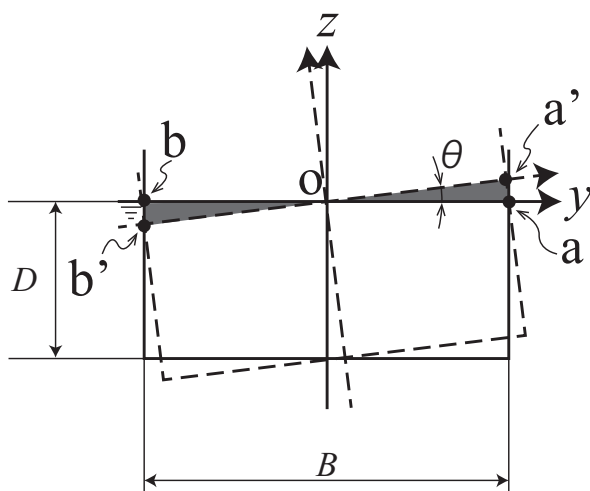


図 3.15: オイラーの浮面心定理

ら浮力は反時計回りのモーメントを発生することとなることが図からも分かる．後ほどさらに深く議論するが，この交点のことをメタセンターと呼び，重心がメタセンターより上にいくことで転倒する．逆に重心がメタセンターより下にあると浮体は安定することとなる．

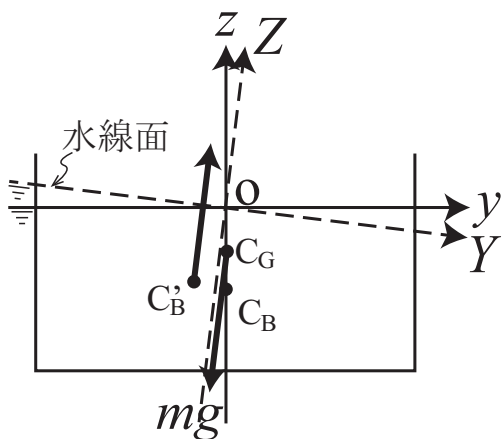


図 3.16: 浮体の傾斜による浮心の移動

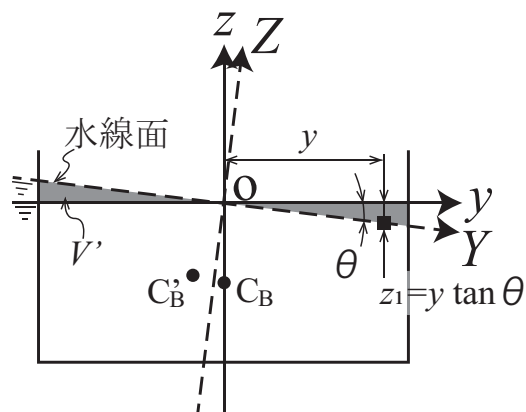


図 3.17: 浮心を求めるための積分範囲

浮心は体積一次モーメントであるから

$$z_B = \frac{1}{V} \int_V z dV \quad (3.22)$$

である．傾斜後の浮心である C'_B については，

$$(y'_B, z'_B) = \frac{1}{V} \int_{V+V'} (y, z) dV \quad (3.23)$$

で求められる．ここで V は元の水面と浮体で囲まれる部分であり， V' は傾斜後の水面と元の水面で囲まれる部分である． V' 部分の体積積分は鉛直方向である z 方向と水平方向について直交していると考えても差し支えない．よってこの微小体積については $dV = dzdS$ として表せば

$$(y'_B, z'_B) = \frac{1}{V} \left(\int_V (y, z) dV + \int_S \int_0^{z'} (y, z) dz dS \right) \quad (3.24)$$

となる． S は元の水線面積である．左右対称としているので， y 方向の元々の浮心は 0 であった．上式を変形して

$$(y'_B, z'_B - z_B) = \frac{1}{V} \left\{ \int_S \left(yz', \frac{1}{2} z'^2 \right) dS \right\} = \frac{1}{V} \left\{ \int_S \left(y^2 \tan \theta, \frac{1}{2} y^2 \tan^2 \theta \right) dS \right\} \quad (3.25)$$

が得られる．上式において $z' = y \tan \theta$ の関係を使っている．

ここで，

$$I_y = \int_S y^2 dS \quad (3.26)$$

とすれば，(3.25) 式は

$$y'_B = \frac{I_y}{V} \tan \theta \approx \frac{I_y}{V} \theta \quad (3.27)$$

$$z'_B - z_B = \frac{1}{2} \frac{I_y}{V} \tan^2 \theta \approx \frac{1}{2} \frac{I_y}{V} \theta^2 \quad (3.28)$$

となる．従って，

$$z'_B - z_B = \frac{1}{2} \frac{V}{I_y} y_B'^2 \quad (3.29)$$

を最終的に得る．最終的に得られたこの関係は元の浮心位置 $C_B(0, z_B)$ から $C'_B(z'_B, y'_B)$ は放物線を描くように移動することを意味している．

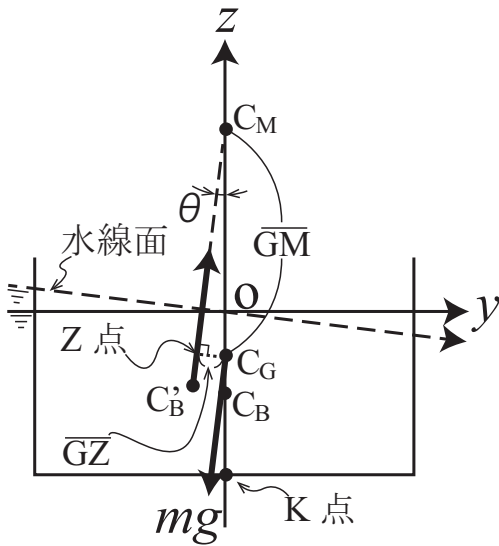


図 3.18: $\overline{GM}$

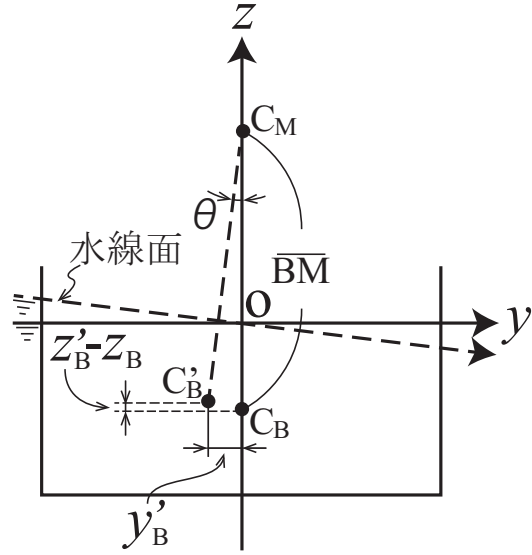


図 3.19: $\overline{BM}$

最後に浮体が復原する原理について定量的に纏めてみたい．図 3.18 に浮体が θ 傾斜した時の力学的な様子を描く． C_G は重心位置を示している．浮心は C'_B に移動するが， z 軸との交点を C_M とする．この点はメタセンターと呼ばれ，浮心の曲率中心である． $|\overrightarrow{C_M C'_G}|$ のことを $\overline{GM}$ または $\overline{GM}$ と呼び浮体の安定，不安定を決定付ける． C_G が C_M より上にある状態を $\overline{GM}$ が負であると言い，この時浮体が傾斜すると転覆に至る．逆に下にある状態を正であると言い，浮体が傾斜しても復原する．この図において C_G 回りのモーメントを考えると腕の長さは C_G と Z 点との距離である．この距離のことを $\overline{GZ}$ または $\overline{GZ}$ という．復原モーメント M_g は

$$M_g = \rho g V \overline{GZ} = \rho g V \overline{GM} \sin \theta \approx \rho g V \overline{GM} \theta \quad (3.30)$$

となる．また， $\overline{GM}$ は

$$\overline{GM} = \overline{BM} - \overline{BG} = \overline{BM} - (\overline{KG} - \overline{KB}) \quad (3.31)$$

である． $\overline{KG}$ ， $\overline{KB}$ はそれぞれ浮体底部から重心までの高さ，底部から浮心までの高さである． $\overline{KG}$ は浮体の質量バランスで決まり， $\overline{KB}$ は浮体の水面下の形状で決まる．また $\overline{BM}$ は

$$\overline{BM} = \frac{y'_B}{\tan \theta} + (z'_B - z_B) \approx \frac{I_y}{V} \quad (3.32)$$

で求められる．ここで， θ^2 の項は微小であるとして省略した．

Exercise

1. 大気圧下で水銀 (比重 13.6), 水, 油 (比重 0.92) を容器に入れたところ図 3.20 に示すような状態に分離した. A 点, B 点, C 点, D 点の各点におけるゲージ圧を求めなさい.

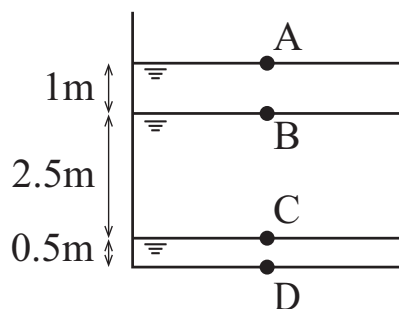


図 3.20: 問 1

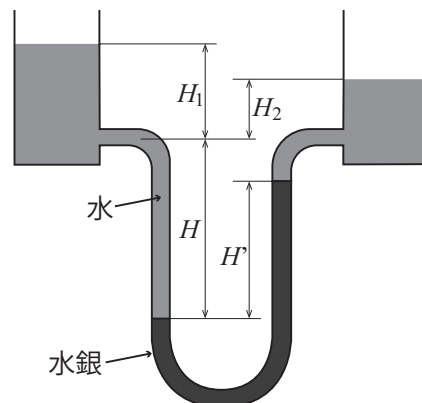


図 3.21: 問 3

2. 海において水深 50m における圧力をゲージ圧力と絶対圧力で示しなさい. 大気圧を 101.3kPa とする.
3. 図 3.21 のような状態で釣り合っている. 水銀面の高さの差 H' はどれほどか. 水の密度を ρ , 水銀の比重を s_m であるとする.
4. 図 3.22 のようなゲートについて, 支持棒に生じる力を求めなさい. ゲートの幅 (奥行) は 1 とする.

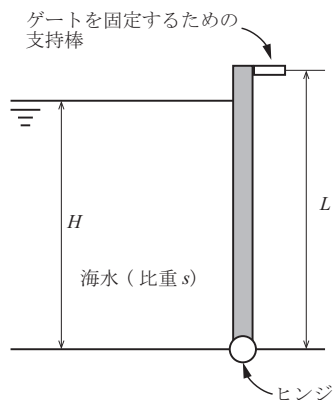
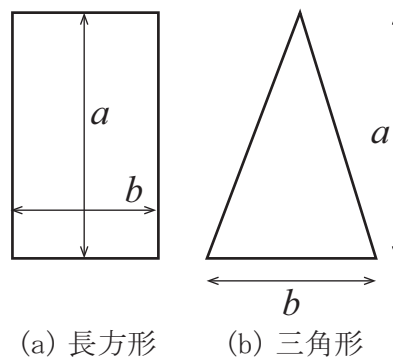


図 3.22: 問 4



(a) 長方形 (b) 三角形

図 3.23: 問 5

5. 図 3.23 に示す長方形, 三角形の図心 C の座標 z_c を求めなさい. また, 断面二次モーメントを求めなさい.
6. 図 3.24 に示すように水が T のところに行かないように長方形の板を設ける. この長方形平板の幅は 1 とする. この時, 板を支える力 F を求めなさい.
7. 厚み 10mm の鉄板を組み合わせて幅 2m, 厚み 2m, 高さ 1m の直方体を作った. 但し蓋はない. この直方体の材料は鉄である. これを水に浮かべた時の喫水 d を求めなさい. また, $\overline{GM}$ を求めなさい. この直方体に質量 m の球を図 3.25 のように質量を無視できる棒を用いて設置した. 球の重心位置は立方体底面から 1m のところにある. この立方体が安定せずに転覆する質量 m の条件を示しなさい.

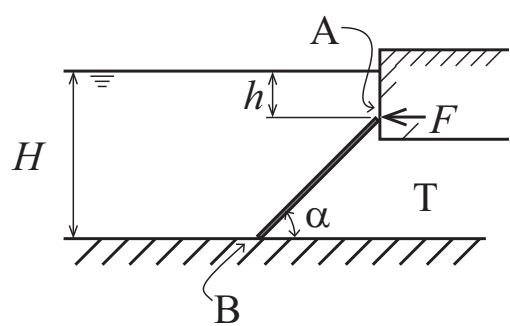


図 3.24: 問 6

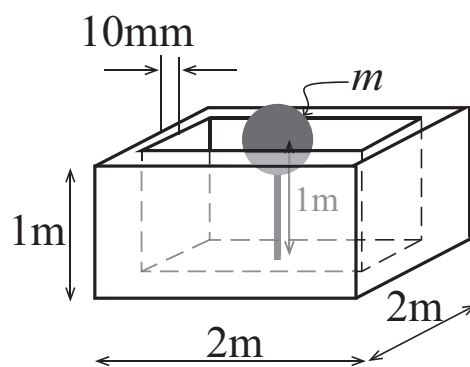
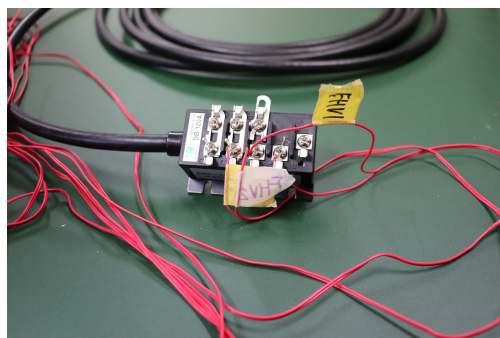
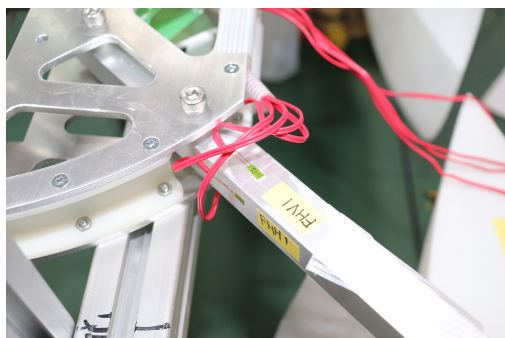


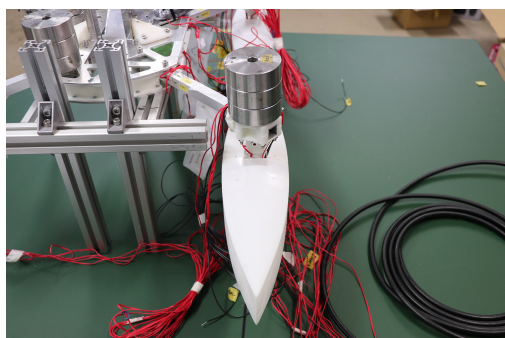
図 3.25: 問 7

ひずみゲージ (strain gauge)

材料片に抵抗体を貼り付け、材料が変形したときに抵抗体の抵抗が変化することを利用して材料片のひずみを測ることが出来る。この抵抗体をひずみゲージ (strain gauge) と言う。我々の実に様々なところで利用されている。身近なところと言うと体重計の中にもひずみゲージが入っている。下図左にひずみゲージ (緑色の部分) を示す。このひずみゲージの抵抗変化量は実際には非常に小さい。そこでブリッジ回路を組み、ひずみゲージの抵抗変化が生じた際に変化する微量電圧を増幅する方法でひずみ量を調べる手法が用いられる。下図右がブリッジ回路を組んでいるブリッジボックスである。



ひずみゲージ → ブリッジボックス → アンプという流れで機器は接続される。下図左は四胴型自動航行船の 1/3 模型のハル部上部に質量 1.5kg のおもりを載せた時の様子である。この時、下図右の様に電圧が 1.005V と表示された。波浪中を航行する場合、四胴型自動航行船はアーム部がひずむわけだが、1.005V と表示される際にはおよそ 14.7N の荷重が作用しているということを意味する。おもりを使ってどれくらいの電圧変化が生じるかを予め調べることをキャリブレーション (校正: calibration) という。



さて、波浪中のように時々刻々と電圧が変化する場合はどうしたら良いのだろうか。この場合は、データロガーというものがあり、これによりアンプの電圧を A/D (Analog / Digital) 変換し PC にデータを保存することが可能となる。

この装置を使った実験の様子は



に示されるページで閲覧可能である [12].

第 4 章

流体の基礎運動

4.1 流体運動の記述法と流体加速度の関係

流体運動の記述は2つの方法がある．一つは流体粒子の一つ一つを追跡する方法である．この手法をラグランジュ的方法という．もう一つはオイラー的方法である．この方法は流体粒子の一つ一つを追跡するのではなく，空間の各点，各瞬間の流体の状態量（流速 $\mathbf{u}$ ，圧力 p ，密度 ρ ）を固定座標系の位置と時間 (x, y, z, t) の関数として表すものである．

流体粒子一つ一つを追跡する手法であるラグランジュの手法は，観測においては粉体等のトレーサー粒子を流体内に入れて流体粒子一つ一つを捕捉する類の手法である．流れの中では注目した流体は観測点より遠方に流れていく場合もある．よって，決まった流体粒子を追跡する方法は観測が難しい場合が多い．流れの計算も無数の流体粒子がある為に難しい場合が多い．数値計算手法が進んだ昨今，ラグランジュの手法をベースにした数値計算法の一つである粒子法と呼ばれる手法が登場し様々な適用事例が増えてきている [13]．

流体力学の問題の多くはもう一方の手法であるオイラー的立場に立って多くの事例が考えられてきた．これ以降，本書はこのオイラーの手法に則る．

流体力学の目標は流れ場を明らかにすることにあると言える．即ち，各点における流体の流速 $\mathbf{u}(x, y, z, t)$ 及び圧力 $p(x, y, z, t)$ ，流体密度 $\rho(x, y, z, t)$ といった最低 5 つの未知数を支配方程式に基づき解くことに他ならない．これ以外にも例えば内燃機関内の流体問題を解くような場合は温度を求めるような場合もある．本書は海洋工学を学ぶ方向けの書であるので温度等の問題は取り扱わない．

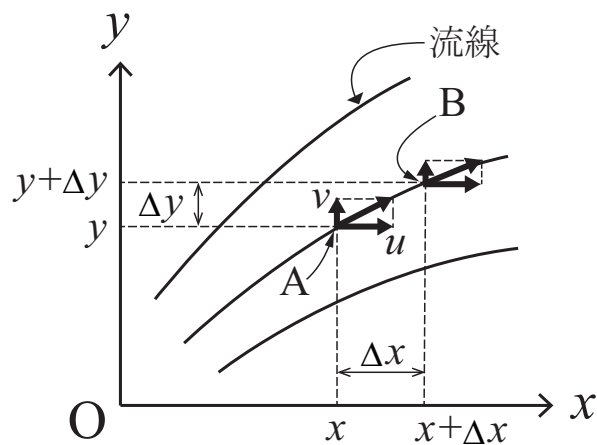


図 4.1: $t = t$ における流線

図 4.1 に示されるように，オイラー的立場に立ち A 点を通過しようとする流体粒子が持つ加速度について考えてみる．二次元平面での流れ場で考えてみる．オイラー的視点に立っているので，流速は $\mathbf{u}(x, y, t) = (u(x, y, t), v(x, y, t))$ として表される．この時に注意すべきは流体粒子には着目しておらず，固定点である A 点を通過する流体粒子を眺め

という事である．もし，一つの流体粒子に着目するならば加速度は

$$\frac{d\mathbf{u}}{dt} \quad (4.1)$$

となることに異論はない．オイラー的立場でも A 点において流速が $t = t$ から $t = t + \Delta t$ において変化している場合，その速度の時間変化は

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{u(x, y, t + \Delta t) - u(x, y, t)}{\Delta t} = \frac{\partial u}{\partial t} \quad (4.2)$$

で与えられる．

次に，図 4.1 に示されるように， $t = t$ における流線について見てみよう．B 点にある粒子は $t - \Delta t$ に同一流線上の A 点にあったとする．また， $t = t$ における B 点での x 方向流速は $u(x + \Delta x, y + \Delta y, t)$ である．A 点を通過する流体粒子の加速度は単位時間当たりの速度の変化と定義される訳であるから A 点という固定点から見た時，加速度は

$$\frac{u(x + \Delta x, y + \Delta y, t) - u(x, y, t)}{\Delta t} \quad (4.3)$$

と表される．B 点での流速は

$$u(x + \Delta x, y + \Delta y, t) \approx u(x, y, t) + \frac{\Delta u}{\Delta x} \Delta x + \frac{\Delta u}{\Delta y} \Delta y \quad (4.4)$$

であるから (4.3) は

$$\frac{u(x + \Delta x, y + \Delta y, t) - u(x, y, t)}{\Delta t} \approx \frac{\Delta u}{\Delta x} \frac{\Delta x}{\Delta t} + \frac{\Delta u}{\Delta y} \frac{\Delta y}{\Delta t} \quad (4.5)$$

となる．また， $u = \Delta x / \Delta t$ ， $v = \Delta y / \Delta t$ なので，最終的に加速度として

$$\lim_{\Delta x, \Delta y \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} \frac{\Delta x}{\Delta t} + \frac{\Delta u}{\Delta y} \frac{\Delta y}{\Delta t} = u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \quad (4.6)$$

が得られる．(4.2) と (4.6) とを合わせて，A 点を通過する流体粒子の加速度は

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \quad (4.7)$$

となる．このような固定点から流体の流れを観察した際の時間微分を実質微分と呼ぶ．(4.7) は x 方向の加速度であり，また二次元で考えたものである．三次元でも全く同じ事が言える．以上より x ， y ， z 方向の加速度は

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} \end{cases} \quad (4.8)$$

となる．

4.2 境界条件

流速や圧力は流体の支配方程式とともに境界条件や初期条件により決定される．微分方程式の解には任意関数が含まれており，任意関数を確定する為には何らかの境界条件・初期条件を考慮して決定するのと同様の考えである．ここでは，以下の 2 つの境界条件のパターンについて考えてみたい．一つ目は (1) 物体表面での境界条件であり，もう一つは (2) 変形する境界面での境界条件である．

(1) 物体表面での境界条件

物体は変形しないものとする．図 4.2 に示すように物体表面の任意の 1 点での法線ベクトルを $\mathbf{n}(\mathbf{x})$ ，流体流速を $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ とする．そして物体は移動しており，移動速度を $\mathbf{u}'(\mathbf{x}, t)$ とする．物体表面において相対流速 $\mathbf{u} - \mathbf{u}'$ の法線方



図 4.2: 物体表面における境界条件

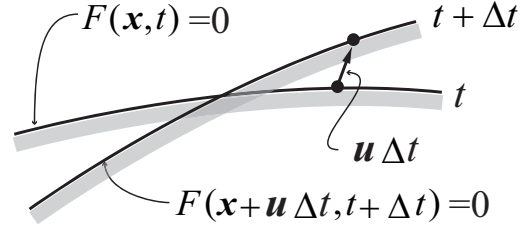


図 4.3: 境界が変形する場合の境界条件

向流速は 0 とならなくてはならない。何故なら物体表面から流体が流れ出てくることはないし、物体が変形でもしない限り物体に流体が吸い込まれることがないからである。即ち、

$$\{\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) - \mathbf{u}'(\mathbf{x}, t)\} \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}) = 0 \quad (4.9)$$

が成り立つ。物体が固定されている場合は $\mathbf{u}' = 0$ であるので

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}) = 0 \quad (4.10)$$

が成り立つ。

(2) 変形する境界面での境界条件

水面が変形する境界の代表例と言えよう。図 4.3 に示す様に時刻 t における境界面の形状が

$$F(\mathbf{x}, t) = 0 \quad (4.11)$$

で与えられるとする。境界面を構成する流体粒子は Δt 時間後も境界面を構成する流体粒子であり続けるので、 Δt 時間進んだ場合も次式が成り立つ。

$$F(\mathbf{x} + \mathbf{u}\Delta t, t + \Delta t) = 0 \quad (4.12)$$

今、この境界面を表す関数 F の時間変化を考えると、4.1 節と同様の議論から Lagrange 微分となり、また関数 F は常に 0 である為、次式が成り立つ。

$$\frac{DF}{Dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{F(\mathbf{x} + \mathbf{u}\Delta t, t + \Delta t) - F(\mathbf{x}, t)}{\Delta t} = \frac{\partial F}{\partial t} + u \frac{\partial F}{\partial x} + v \frac{\partial F}{\partial y} + w \frac{\partial F}{\partial z} = 0 \quad (4.13)$$

この (4.11) と (4.13) が変形する境界面での境界条件となる。

4.3 流線

流体の流れの様子を表すものが流線である。図 4.4 に流線の様子を示す。A から Δt 時間に $\Delta \mathbf{r} = (\Delta x, \Delta y, \Delta z)$ 移動しているので、

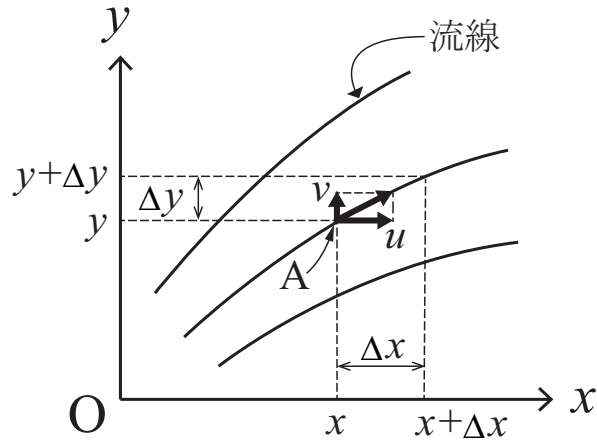
$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{u}(x, y, z, t) \quad (4.14)$$

が成り立つと言える。即ち x, y, z 方向成分に分けて考えると以下が成り立つ。

$$\frac{dx}{u(x, y, z, t)} = \frac{dy}{v(x, y, z, t)} = \frac{dz}{w(x, y, z, t)} = dt \quad (4.15)$$

これを流線の微分方程式という。

流体力学においては流線以外にも流れの道すじや色付き流線といった概念もある。詳細については文献 [14] に詳しいので参考にされたい。

図 4.4: $t = t$ における流線

4.4 流体粒子の運動

流体は変形が自由である．この節では流体がどのような運動から構成されるのかについて述べる．結果論から言うと、以下の4つの基本的な運動で構成される．

- 並進運動
- 伸び縮み
- 回転運動
- ずれ運動 (せん断変形)

これを議論する為、図 4.5 に示すように流体内 $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0$ にある任意の1つの微小流体塊に着目することとしよう．この流体塊は運動をしており、その流速 $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = (u, v, w)$ を $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0$ 周りで以下の様に Taylor 展開してみる．尚、 u は x 方向、 v は y 方向、 w は z 方向流速を示している．

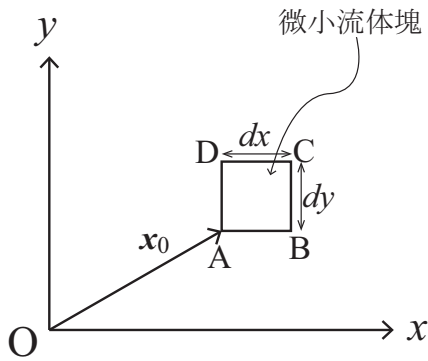


図 4.5: 流体中にある微小流体塊

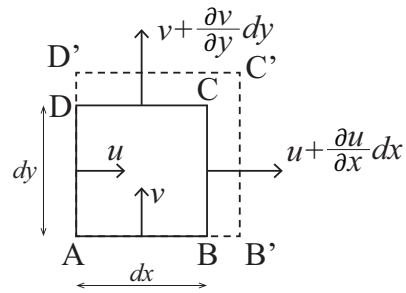


図 4.6: 微小流体塊の伸び縮み

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{u}(\mathbf{x}_0, t) + \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} \right) \Big|_{\mathbf{x}_0} (x - x_0) + \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial y} \right) \Big|_{\mathbf{x}_0} (y - y_0) + \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial z} \right) \Big|_{\mathbf{x}_0} (z - z_0) + O(\mathbf{x}^2) \quad (4.16)$$

ここで偏微分の微係数は $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0$ における係数である。この各成分を一旦各方向成分に分解する。 $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ は各方向の単位ベクトルである。これを使って、

$$\begin{aligned} \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = & \mathbf{u}(\mathbf{x}_0, t) + a_{11}(x - x_0)\mathbf{i} + a_{12}(y - y_0)\mathbf{i} + a_{13}(z - z_0)\mathbf{i} \\ & + a_{21}(x - x_0)\mathbf{j} + a_{22}(y - y_0)\mathbf{j} + a_{23}(z - z_0)\mathbf{j} \\ & + a_{31}(x - x_0)\mathbf{k} + a_{32}(y - y_0)\mathbf{k} + a_{33}(z - z_0)\mathbf{k} \end{aligned} \quad (4.17)$$

となる。(4.17) において

$$a_{ij} = \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right)_{\mathbf{x}_0} \quad (4.18)$$

である。上式において $(u_1, u_2, u_3) = \mathbf{u}$, $(x_1, x_2, x_3) = \mathbf{x}$ を意味する。

(4.17) より、点 A では 10 種類の速度で組み合わせられる運動から成り立っていることが分かる。

では、一つ一つ整理しながら見ていこう。まず分かり易い (4.17) における $\mathbf{u}(\mathbf{x}_0, t)$ である。これは流体塊の並進運動を表している。

次に、 a_{11} , a_{22} , a_{33} の意味合いを考えてみよう。これらの係数は (4.18) から

$$a_{11} = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad a_{22} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad a_{33} = \frac{\partial w}{\partial z} \quad (4.19)$$

である。図 4.6 に 2 次元ではあるが $\partial u / \partial x$ と $\partial v / \partial y$ の意味合いを示している。この図から Δt 時間後

$$\begin{aligned} AB' &= dx + \frac{\partial u}{\partial x} dx \Delta t \\ AD' &= dy + \frac{\partial v}{\partial y} dy \Delta t \end{aligned}$$

であることが分かる。すなわち a_{11} , a_{22} , a_{33} の係数は流体の x , y , z 方向の伸び縮みの割合を表していると理解できる。この値が正であれば伸び、負であれば縮みである。

(4.17) の非対角項 (a_{ij} の $i \neq j$ の項) の持つ意味をより理解し易くするために下記のように書き改めると良いことが知られる [14]。例えば $a_{12}y\mathbf{i} + a_{21}x\mathbf{j}$ について、

$$a_{12}y\mathbf{i} + a_{21}x\mathbf{j} = \Omega_z (x\mathbf{j} - y\mathbf{i}) + \frac{1}{2}\gamma_{xy} (x\mathbf{j} + y\mathbf{i}) \quad (4.20)$$

と書き改める。ここで、

$$\Omega_z = \frac{1}{2} (a_{21} - a_{12}) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) \quad (4.21)$$

$$\gamma_{xy} = a_{21} + a_{12} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \quad (4.22)$$

である。

図 4.7 に示されるように

$$\angle B'AB + \angle D'AD = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) \Delta t = \Omega_z \Delta t \quad (4.23)$$

である。即ち、(4.21) は z 軸周りの角速度 Ω_z の回転を表している。また、図 4.8 に示されるように

$$\angle B'AB + \angle D'AD = \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) \Delta t = \gamma_{xy} \Delta t \quad (4.24)$$

となる。図 4.8 のような変形のことを純粋のずれ運動 (せん断変形) と呼ぶ。また、 γ_{xy} はせん断変形の変形速度を表している。

以上の議論を背景に (4.17) を物理的解釈がし易い形に書き換えたものが下記の式である。

$$\begin{aligned} \mathbf{u} = & \mathbf{u}(\mathbf{x}_0, t) + \Omega_x (y\mathbf{k} - z\mathbf{j}) + \frac{1}{2}\gamma_{yz} (y\mathbf{k} + z\mathbf{j}) + \epsilon_x x\mathbf{i} \\ & + \Omega_y (z\mathbf{i} - x\mathbf{k}) + \frac{1}{2}\gamma_{zx} (z\mathbf{i} + x\mathbf{k}) + \epsilon_y y\mathbf{j} \\ & + \Omega_z (x\mathbf{j} - y\mathbf{i}) + \frac{1}{2}\gamma_{xy} (x\mathbf{j} + y\mathbf{i}) + \epsilon_z z\mathbf{k} \end{aligned} \quad (4.25)$$

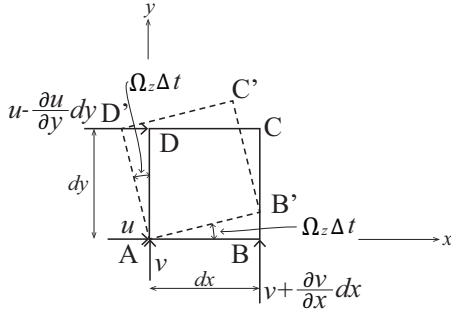


図 4.7: 微小流体塊の回転

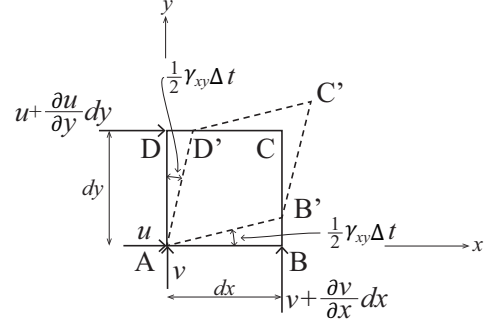


図 4.8: 微小流体塊のずれ運動 (せん断変形)

ここで,

$$\Omega_x = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \right), \quad \gamma_{yz} = \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}, \quad \epsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} \quad (4.26)$$

$$\Omega_y = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right), \quad \gamma_{zx} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}, \quad \epsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} \quad (4.27)$$

$$\Omega_z = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right), \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}, \quad \epsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} \quad (4.28)$$

である。(4.25) の $\mathbf{u}(x_0, t)$ は流体塊の並進運動を表している。 $\Omega_x, \Omega_y, \Omega_z$ は x, y, z 軸周りの流体回転角速度を表しており、(4.25) の Ω の項は流体塊の回転運動項である。 $\gamma_{yz}, \gamma_{zx}, \gamma_{xy}$ はせん断変形速度を表しており、(4.25) の γ の項は流体塊のせん断変形項である。(4.25) における ϵ は流体塊の伸縮変形を表している。流体における流体塊はこのように並進運動、回転運動、ずれ運動 (せん断変形)、伸び縮みをしていると理解できる。

4.5 流量と循環

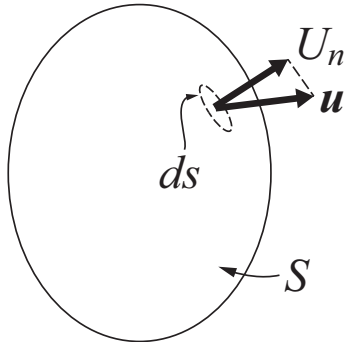


図 4.9: 流量

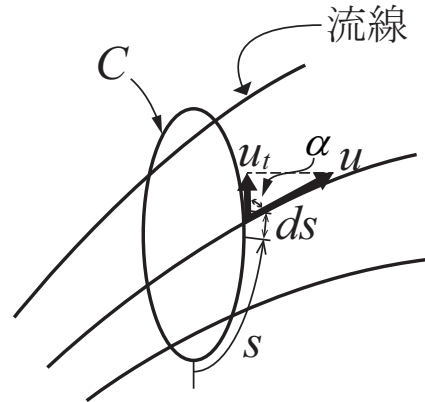


図 4.10: 周積分と循環

単位時間あたりに任意の断面を通過する流体体積を流量という。単位は m^3/s である。流量を Q として,

$$Q = \int_S U_n ds \quad (4.29)$$

で表される。図 4.9 に示されるように、 U_n は法線方向流速である。また、法線ベクトルを $\mathbf{n}$ として、 $U_n = \mathbf{u} \cdot \mathbf{n}$ であるから

$$Q = \int_S \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} ds \quad (4.30)$$

とも表される。

循環 Γ とは流体の渦運動の強さを代表する量である。図 4.10 に示す様に、流れの中に一つの閉曲線 C をとり、 C 上の一点 A から C に沿って長さ s を測る。 C 上の微小線要素 ds として、その接線方向流速を u_t とする。閉曲線 C に沿っての一周積分 $\Gamma(C)$

$$\Gamma(C) = \oint_C u_t ds \quad (4.31)$$

を閉曲線 C に沿う循環という。さて、図 4.10 に示す様に、流れに対しての接線流速を u とする。 $u_t = u \cos \alpha$ であるから、

$$\Gamma(C) = \oint_C u \cos \alpha ds = \oint_C \mathbf{u} \cdot d\mathbf{s} \quad (4.32)$$

が得られる。ここで、 $\mathbf{u} = (u, v, w)$, $d\mathbf{s} = (dx, dy, dz)$ である。

第 5 章

完全流体の力学の基礎

本章では流体の運動を支配する支配方程式に主眼をおいて述べる．流体の運動を議論する際に，粘性の影響を考慮すべきか否かが大きな分かれ道の一つとなる．流体摩擦のような問題を取り扱う場合は粘性の影響を考慮しなくてはならず，その場合の支配方程式は Navier Stokes(ナビエ・ストークス) 方程式を解くこととなる．一方で，粘性の影響を無視できる場合もある．このような非粘性流体を完全流体と呼ぶ．完全流体として考える代表的な事例が，海洋工学でよく取り扱われる波の問題である．また，翼の揚力の問題も完全流体として扱われる．Navier Stokes 方程式を理論的に解くことが可能な問題は限定的であり，数値流体力学が進んだ昨今，強力な計算機を用いて Navier Stokes 方程式を解くことが盛んに行われているが，問題の本質に応じて粘性の問題まで解くべきか否かは注意する必要がある．

本章では完全流体の支配方程式について主に述べる．但し，粘性の問題であっても使うことが出来る定理も中にはあるので導出過程を具に把握する必要がある．

5.1 輸送定理

流体力学における基礎方程式である連続の式や運動方程式である Euler(オイラー) の運動方程式や Navier-Stokes(ナビエ・ストークス) 方程式を導く際に輸送定理が使われるのでここで導出しておく．J. N. Newman の Marine Hydrodynamics にも詳しく説明されている [15]．さて，任意の関数 $f(\mathbf{x}, t)$ を考える．そして次の体積積分を考える．

$$I(t) = \iiint_{V(t)} f(\mathbf{x}, t) dV \quad (5.1)$$

ここで t は任意の時間を示しており， $V(t)$ は時間とともに変化する任意の流体塊である． $\mathbf{x}$ はこの流体内の位置座標である．この流体塊の境界 $S(t)$ も時間とともに変化する．そして，その法線方向の流速は $U_n(\mathbf{x}, t)$ であるとする．

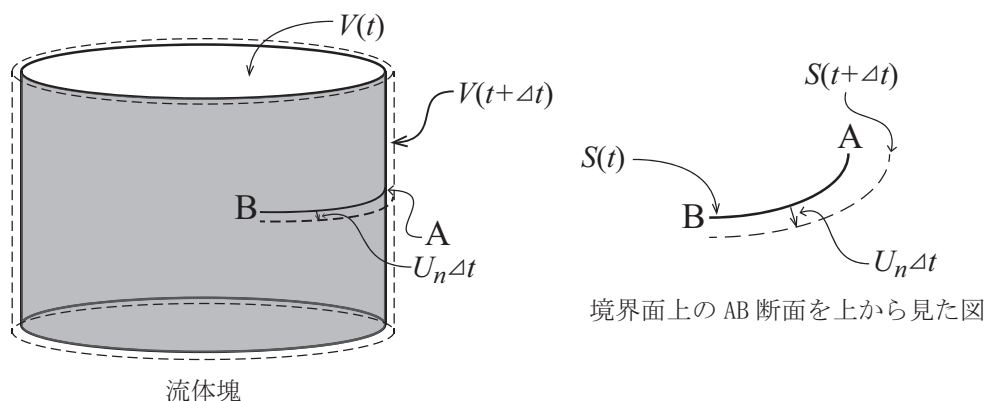


図 5.1: 輸送定理における流体塊の概念図

この体積積分 $I(t)$ の時間増分 ΔI を考えてみることにする.

$$\Delta I = I(t + \Delta t) - I(t) = \iiint_{V(t+\Delta t)} f(\mathbf{x}, t + \Delta t) dV - \iiint_{V(t)} f(\mathbf{x}, t) dV \quad (5.2)$$

となる. 関数 f の時間に関する 1 次までの Taylor 展開は

$$f(\mathbf{x}, t + \Delta t) = f(\mathbf{x}, t) + \Delta t \frac{\partial f(\mathbf{x}, t)}{\partial t} \quad (5.3)$$

となる. これを (5.2) に代入する. また, $V(t + \Delta t) = V + \Delta V$ なので

$$\begin{aligned} \Delta I &= \iiint_{V+\Delta V} \left(f + \Delta t \frac{\partial f}{\partial t} \right) dV - \iiint_V f dV \\ &= \iiint_V \Delta t \frac{\partial f}{\partial t} dV + \iiint_{\Delta V} f dV + \iiint_{\Delta V} \Delta t \frac{\partial f}{\partial t} dV \end{aligned} \quad (5.4)$$

が得られる. 次に (5.4) の右辺第 2 項, 3 項について考えよう. 図 5.1 より, Δt 時間で増えた部分の微小体積 ΔV は流体体積 V を取り囲む境界 S から Δt 時間で流出する流体塊であると理解できるので, 境界面における法線方向流速 $U_n(\mathbf{x}, t)$ を用いて

$$\iiint_{\Delta V} f dV + \iiint_{\Delta V} \Delta t \frac{\partial f}{\partial t} dV = \iint_S f(U_n \Delta t dS) + \iint_S \Delta t \frac{\partial f}{\partial t} (U_n \Delta t dS) \quad (5.5)$$

となる. 上式の右辺 2 項目は $O[\Delta t^2]$ と 2 次の微小項になるので無視できるものとする. ここから $I(t)$ の時間微分は

$$\frac{dI}{dt} = \iiint_V \frac{\partial f}{\partial t} dV + \iint_S f U_n dS \quad (5.6)$$

となる. 上式 2 項をもう少し変形していく. 境界面における法線方向流速 $U_n(\mathbf{x}, t)$ は x, y, z 方向の流速成分 $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = (u(\mathbf{x}, t), v(\mathbf{x}, t), w(\mathbf{x}, t))$ と法線の各成分 $\mathbf{n}(\mathbf{x}, t) = (n_x(\mathbf{x}, t), n_y(\mathbf{x}, t), n_z(\mathbf{x}, t))$ とを用いて

$$U_n = \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = u n_x + v n_y + w n_z \quad (5.7)$$

であるから (5.6) の右辺第 2 項は

$$\iint_S f U_n dS = \iint_S f \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} dS = \iiint_V \nabla \cdot (f \mathbf{u}) dV \quad (5.8)$$

が得られる. 第 2 式と第 3 式の移行は Gauss の発散定理を用いている.

以上より最終的に

$$\frac{d}{dt} \iiint_{V(t)} f(t) dV = \iiint_V \left\{ \frac{\partial f}{\partial t} + \nabla \cdot (f \mathbf{u}) \right\} dV \quad (5.9)$$

という関係が得られる. この関係のことを輸送定理と呼んでいる.

5.2 連続の式

流体力学の基本式の一つ目が連続の式と呼ばれるものである. 質量保存則とも呼ばれる. 図 5.2 に示すような微小流体塊を考える. 流体の密度を ρ とする. dt 時間内にこの流体塊に流入する流体の質量は

$$\rho u dy dz dt + \rho v dx dz dt + \rho w dx dy dt \quad (5.10)$$

と表される. 一方, 流出する流体の質量は

$$\rho \left\{ \left(u + \frac{\partial u}{\partial x} dx \right) dy dz dt + \left(v + \frac{\partial v}{\partial y} dy \right) dx dz dt + \left(w + \frac{\partial w}{\partial z} dz \right) dx dy dt \right\} \quad (5.11)$$

である. 流体塊の中の流体密度 ρ が微小時間に変化するとすれば

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} dx dy dz dt \quad (5.12)$$

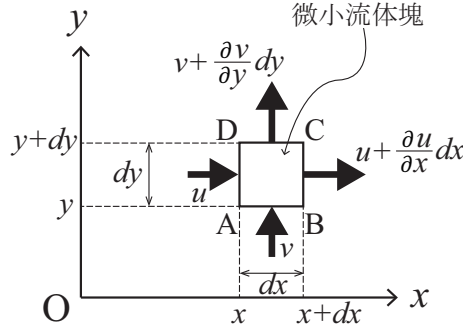


図 5.2: 微小流体塊に流入する流体

が dt 時間に増える流体の質量である．密度変化分 + 流出量 - 流入 = 0 であるので

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) = 0 \quad (5.13)$$

が得られる．(5.13) は流体の密度が変わることを考慮する圧縮性流体の場合の連続の式という．一方，流体の密度変化を無視できる場合も多い．このような流体のことを非圧縮性流体と呼ぶが，非圧縮性流体の場合の連続の式は

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (5.14)$$

となる．

5.3 Euler の運動方程式

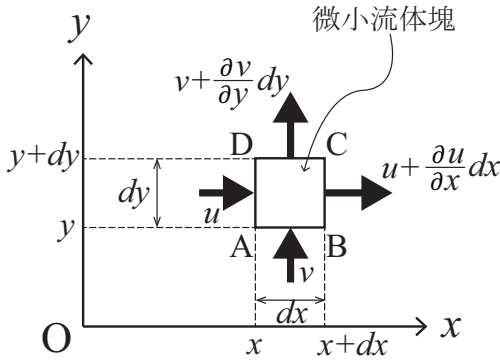


図 5.3: 微小流体塊

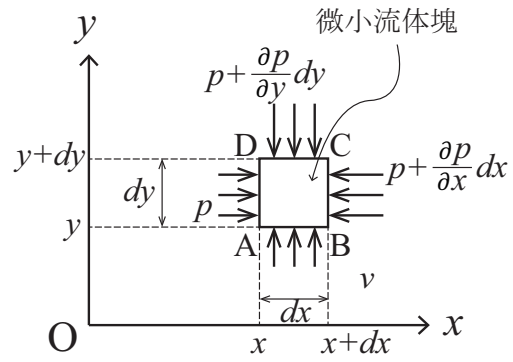


図 5.4: 微小流体塊に作用する圧力

流体力学における基礎方程式の2つ目が Euler の運動方程式である．前節と同様に図 5.3 に示す微小な流体塊を考える．この流体塊の質量は $\rho dx dy dz$ であるから各方向軸の運動量の時間変化は

$$\begin{cases} \frac{d\rho u}{dt} dx dy dz \\ \frac{d\rho v}{dt} dx dy dz \\ \frac{d\rho w}{dt} dx dy dz \end{cases} \quad (5.15)$$

で与えられる．図 5.4 に示すように外力は圧力， z 方向負方向に作用する重力と考えると運動方程式は

$$\begin{cases} \rho \frac{du}{dt} = -\frac{\partial p}{\partial x} \\ \rho \frac{dv}{dt} = -\frac{\partial p}{\partial y} \\ \rho \frac{dw}{dt} = -\frac{\partial p}{\partial z} - \rho g \end{cases} \quad (5.16)$$

となる．ここで左辺について考える．各方向への流速成分 $\mathbf{u} = (u, v, w)$ は時間と位置の関数であるから $u(\mathbf{x}, t)$, $v(\mathbf{x}, t), w(\mathbf{x}, t)$ である．よって，この時間微分は

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{dv}{dt} = \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial v}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{dw}{dt} = \frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial w}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} \end{cases} \quad (5.17)$$

となる．以上より，(5.16) は

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} \\ \frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} - g \end{cases} \quad (5.18)$$

となる．上式を Euler の運動方程式という．ベクトル表記で表すと

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \text{grad}) \mathbf{u} = -\frac{1}{\rho} \text{grad } p - g \mathbf{k} \quad (5.19)$$

となる．ただし $\mathbf{k} = (0, 0, 1)$ である．(5.19) の左辺項を慣性項，右辺第一項を圧力項，第二項を外力項と言う．

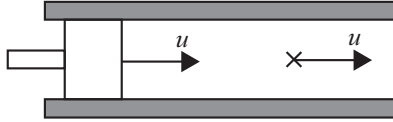


図 5.5: 非定常項

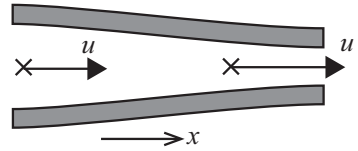


図 5.6: 対流項 1

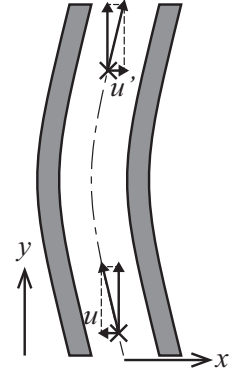


図 5.7: 対流項 2

慣性項についてさらに理解を進めよう．簡単のために (5.18) の x 方向に関する Euler の運動方程式内に現れる慣性項について考える．図 5.5 に示すように一様な太さの筒内に流体が満たされているとする．満たされている流体が非圧縮性の流体であるとする．ピストンで流体を押す際には流体はピストンと一緒に速度で動くであろう．ピストンが $\partial u / \partial t$ の加速度運動をすれば，流体も同じく加速度運動し，その大きさは $\partial u / \partial t$ となる．次に慣性項の第二項について考える．図 5.6 に示すような縮流管内を流体が流れているとする．この流れが定常な流れであっても，流れは u から u' となり流体粒子は加速運動していることが分かる．そして，その加速度の大きさは流体粒子の速度，及び位置による速度の変化 $\partial u / \partial x$ に比例して大きい．よって， $u (\partial u / \partial x)$ がその加速度の大きさとなる．次に，図 5.7 のような曲がり管を考えてみる．この図では x 方向の流速は u から u' となる．この時も流れが定常であっても x 方向の流体粒子は加速度運動していることが分かる．そして，加速度の大きさは v 及び $\partial u / \partial y$ に比例すると言える．即ち加速度の大きさは $v (\partial u / \partial y)$ である．慣性項における非定常項以外の項は対流項と呼ばれる．

5.5 Bernoulli の定理

質点の運動において運動方程式を積分することによってエネルギー保存則を得ることが出来る。同様の考えで流体力学においても完全流体の運動方程式を積分することによりエネルギー保存則を導くことが出来る。これを流体力学ではBernoulli(ベルヌーイ)の定理と呼ぶ。流体力学では定常流の場合のベルヌーイの定理が良く用いられる。また、海事流体力学においては例えば波の構造物への荷重を求めることが多く、この場合は非定常のベルヌーイの定理が用いられる。

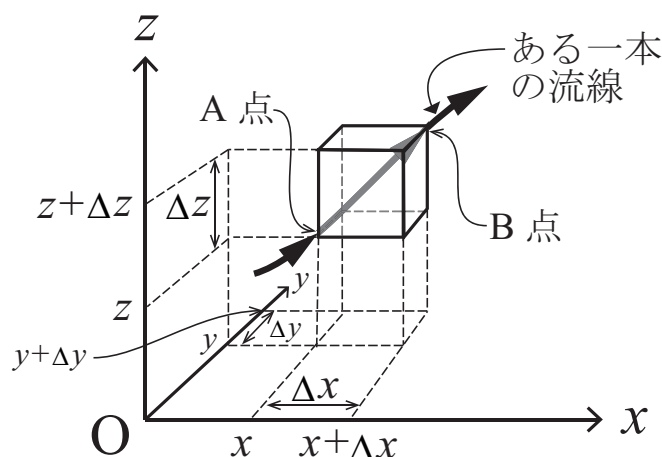


図 5.9: 流線

考える流れが定常であるとしよう. オイラーの運動方程式 (5.18) は

$$\begin{cases} u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} \\ u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} \\ u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} - g \end{cases} \quad (5.24)$$

となる. また, (4.15) に示す関係が一本の流線上では成り立つ. 即ち,

$$v = u \frac{dy}{dx}, w = u \frac{dz}{dx} \quad (5.25)$$

が成り立つ. これを (5.24) の第1式に代入して

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + u \frac{dy}{dx} \frac{\partial u}{\partial y} + u \frac{dz}{dx} \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} \quad (5.26)$$

を得る. さらにこれを変形して

$$\frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial(u^2)}{\partial x} + \frac{\partial(u^2)}{\partial y} \frac{dy}{dx} + \frac{\partial(u^2)}{\partial z} \frac{dz}{dx} \right\} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} \quad (5.27)$$

となる. また, 同様に流線の関係式から

$$u = v \frac{dx}{dy}, w = v \frac{dz}{dy} \quad (5.28)$$

であるから, (5.24) の第 2 式に代入して

$$\frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial(v^2)}{\partial x} \frac{dx}{dy} + \frac{\partial(v^2)}{\partial y} + \frac{\partial(v^2)}{\partial z} \frac{dz}{dy} \right\} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} \quad (5.29)$$

を得る．再び同様に

$$u = w \frac{dx}{dz}, v = w \frac{dy}{dz} \quad (5.30)$$

であるから，(5.24) の第3式に代入して

$$\frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial(w^2)}{\partial x} \frac{dx}{dz} + \frac{\partial(w^2)}{\partial y} \frac{dy}{dz} + \frac{\partial(w^2)}{\partial z} \right\} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} - g \quad (5.31)$$

が得られる．

今，(5.27) $\times dx$ ，(5.29) $\times dy$ ，(5.31) $\times dz$ として，3式を足すと以下を得る．

$$\frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial(U^2)}{\partial x} dx + \frac{\partial(U^2)}{\partial y} dy + \frac{\partial(U^2)}{\partial z} dz \right\} = -\frac{1}{\rho} \left\{ \frac{\partial p}{\partial x} dx + \frac{\partial p}{\partial y} dy + \frac{\partial p}{\partial z} dz \right\} - g dz \quad (5.32)$$

但し， $U^2 = u^2 + v^2 + w^2$ と定義する．(5.32) の左辺第1項の持つ意味は図 5.9 の A 点から B 点における U^2 の変化分であり，右辺第1項は A 点から B 点における圧力変化分，第2項は A 点から B 点における z 方向の位置の変化分である．即ち以下の様に書ける．

$$\frac{1}{2} d(U^2) + \frac{1}{\rho} dp + g dz = 0 \quad (5.33)$$

上式を積分すると

$$\frac{1}{2} U^2 + \int \frac{dp}{\rho} + g z = \text{constant} \quad (5.34)$$

を得る．非圧縮性の流体とすれば密度は一定である為，

$$\frac{1}{2} U^2 + \frac{1}{\rho} p + g z = \text{constant} \quad (5.35)$$

となる．上式の第1項を比運動エネルギー，第2項を比圧送エネルギー，第3項を比位置エネルギーと呼ぶ．この式より1本の流線上でエネルギーの総和は一定である．

以上は定常の流れの Bernoulli の定理について考えた．この考えを拡張して非定常の流れにおける Bernoulli の定理を導いてみる．図 5.10 に示される様に $t = t$ と $t = t + \Delta t$ において流線の接線方向流速に時間変化があるわけであるから (5.32) の左辺に非定常項を加える．即ち，(5.32) の導出の時と同じく，(5.18) の x 方向， y 方向， z 方向の Euler の運動方程式の非定常項に dx ， dy ， dz をそれぞれ掛け，それら3式を加える．また，これを 5.6 節で示す速度ポテンシャルの定義を使って整理してみると，

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} dx + \frac{\partial v}{\partial t} dy + \frac{\partial w}{\partial t} dz &= \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \Phi}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \Phi}{\partial y} dy + \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \Phi}{\partial z} dz \\ &= \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial \Phi}{\partial t} dx + \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial \Phi}{\partial t} dy + \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial \Phi}{\partial t} dz = d \left(\frac{\partial \Phi}{\partial t} \right) \end{aligned} \quad (5.36)$$

となる．よって，(5.33) に非定常項が加わった

$$d \left(\frac{\partial \Phi}{\partial t} \right) + \frac{1}{2} d(U^2) + \frac{1}{\rho} dp + g dz = 0 \quad (5.37)$$

となり，これを積分して

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{1}{2} U^2 + \frac{1}{\rho} p + g z = \text{constant} \quad (5.38)$$

が得られる．これを一般化された Bernoulli の定理と言う．

5.6 速度ポテンシャルと流れ関数と複素速度ポテンシャル

完全流体は非粘性流体と定義される．また，海洋工学において流体は非圧縮流れを扱うことがほとんどであるので，ここでは非圧縮，非粘性流体を考える．完全流体の力学において，流れの数学的な取り扱いを容易にするものに速度ポテンシャルというものがある．速度ポテンシャルで定義される流れ場をポテンシャル流れと言うこともある．また，流

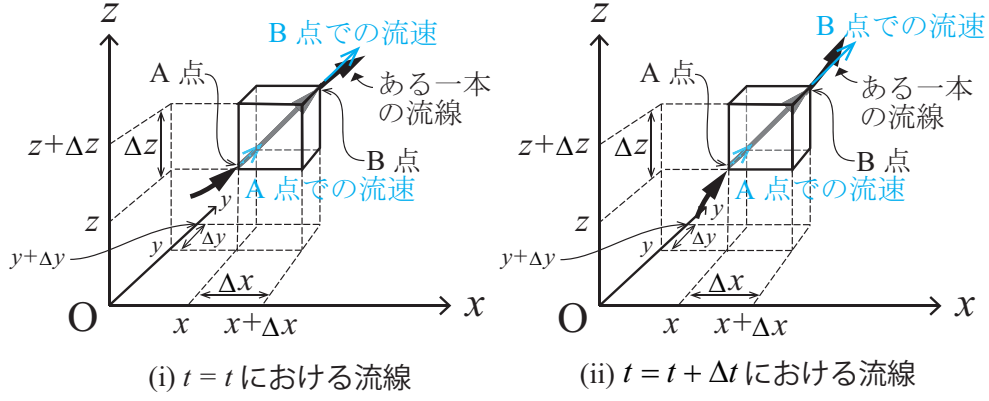


図 5.10: 流線の時間変化

線の様子を表すための関数を流れ関数という．今，ある流場の流速を $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = (u(\mathbf{x}, t), v(\mathbf{x}, t), w(\mathbf{x}, t))$ とする．速度ポテンシャル $\Phi(\mathbf{x}, t)$ は流速成分を用いて

$$u(\mathbf{x}, t) = \frac{\partial \Phi(\mathbf{x}, t)}{\partial x}, \quad v(\mathbf{x}, t) = \frac{\partial \Phi(\mathbf{x}, t)}{\partial y}, \quad w(\mathbf{x}, t) = \frac{\partial \Phi(\mathbf{x}, t)}{\partial z} \quad (5.39)$$

と定義される．第4章の(4.26)式，(4.27)式，(4.28)式より各軸周りの流体粒子の回転角速度 $\boldsymbol{\Omega} = (\Omega_x, \Omega_y, \Omega_z)$ は

$$\Omega_x = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \right), \quad \Omega_y = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right), \quad \Omega_z = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) \quad (5.40)$$

である．(5.39)式を(5.40)式に代入して計算すると，例えば Ω_x に関して

$$\Omega_x = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z \partial y} \right) = 0 \quad (5.41)$$

が得られる．他の角速度も $\Omega_y = 0$, $\Omega_z = 0$ が成り立つ．この関係より速度ポテンシャルが定義される流場は渦無し流れと呼ばれる．

また，非圧縮性流体の連続の式である(5.14)式より，(5.39)の関係式を代入して整理すると

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = 0 \quad (5.42)$$

を得る．即ち，速度ポテンシャル Φ は偏微分方程式の一つであるラプラスの式を満足しなくてはならない．逆に，一般的にはラプラスの式を境界条件及び初期条件の下で解くことで速度ポテンシャル Φ を求め，(5.39)に従い各方向成分で偏微分することにより各点の流速分布を求めることが出来る．これが，流れの数学的取り扱いを容易にする所以である．

次に流れ関数 $\Psi(\mathbf{x}, t)$ と呼ばれるものについて考えてみる．速度ポテンシャルは2次元でも3次元でも成り立つスカラー関数であるが，流れ関数は2次元の流れ場でしか成り立たないことに注意を要する．今，2次元流場の流速を $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = (u(\mathbf{x}, t), v(\mathbf{x}, t))$ と定義する．勿論， $\mathbf{x} = (x, y)$ である．流れ関数は以下によって定義される．

$$u(\mathbf{x}, t) = \frac{\partial \Psi(\mathbf{x}, t)}{\partial y}, \quad v(\mathbf{x}, t) = -\frac{\partial \Psi(\mathbf{x}, t)}{\partial x} \quad (5.43)$$

(5.43)で定義される流れ関数 Ψ を2次元の連続の式に代入してみると

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y \partial x} = 0 \quad (5.44)$$

となることが分かる．即ち，流れ関数は連続の式を自動的に満足する．また，ポテンシャル流れは渦無し流れでもある． $x-y$ 平面における流れでは z 軸周りの回転 Ω_z のみ考えることとなる． $\Omega_z = 0$ であることが求められるから，(5.40)に流れ関数を代入して整理すると，

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} = 0 \quad (5.45)$$

が得られる。即ち、渦無し条件より流れ関数は2次元のラプラスの式を満足する。

流れ関数 $\Psi(x, t) = \text{const.}$ は一本の流線を表す。以下、このことを説明していく。図 5.11 に $\Psi = \text{const.}$ を繋いだ線の様子を描いている。当たり前であるが A 点および B 点では Ψ は同じ値となるので、A 点から B 点は以下の様な関係が成り立つ。

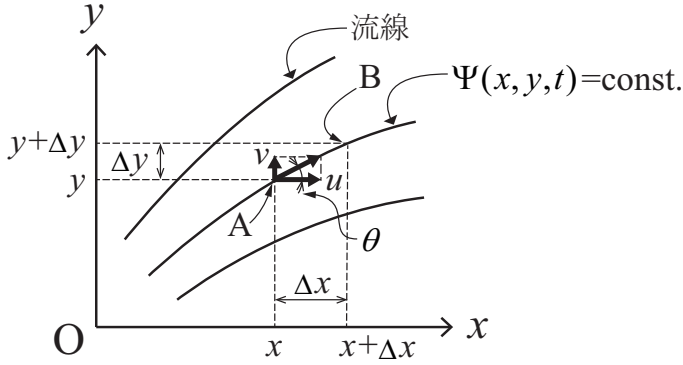


図 5.11: 流れ関数 Ψ の物理的意味

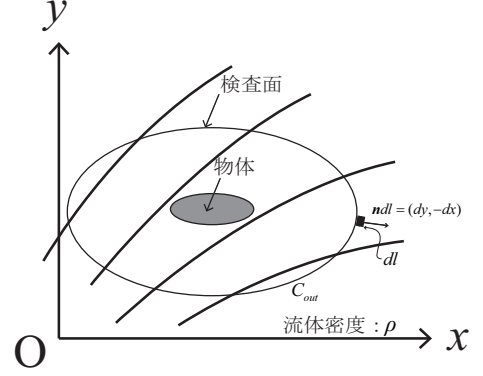


図 5.12: 検査面内の物体

$$d\Psi = \frac{\partial \Psi}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial \Psi}{\partial y} \Delta y = 0 \quad (5.46)$$

(5.43) 式の流れ関数と流速の関係式を (5.46) 式に代入し変形すると以下の式を得る。

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{-\partial \Psi / \partial x}{\partial \Psi / \partial y} = \frac{v}{u} \quad (5.47)$$

図中で $\Delta y / \Delta x$ は $\tan \theta$ を表し、(5.47) 式ではこれが v/u となる関係を得たこととなる。 v/u は流体粒子の向きを表しているので、 $\Psi = \text{const.}$ を繋いだ線は一本の流線を表していることを意味すると言える。

2次元流れ場において、速度ポテンシャル $\Phi(x, y)$ 、流れ関数 $\Psi(x, y)$ を用いて

$$f(z) = \Phi(x, y) + i\Psi(x, y) \quad (5.48)$$

と定義するものを複素速度ポテンシャルと言う。但し、 $i = \sqrt{-1}$ であり、 z はガウス平面を表しており、 $z = x + iy$ または極座標表示 $z = re^{i\theta}$ で表される。複素速度ポテンシャルを z で微分したものを複素速度あるいは共有速度と言い、以下が成り立つ。

$$\frac{df}{dz} = u - iv = \frac{\partial \Phi}{\partial x} + i \frac{\partial \Psi}{\partial x} = \frac{\partial \Psi}{\partial y} - i \frac{\partial \Phi}{\partial y} \quad (5.49)$$

5.7 Blasius の公式

ポテンシャル理論において、速度ポテンシャルが求められたら流速が求められる。流速が求められたら圧力が求まる。圧力を積分することで物体に生じる流体力を求めることが出来るわけだが、別の求め方として運動量保存則を用いて物体を取り囲む遠方の検査面を積分することにより物体に生じる力を求める方法を紹介しよう。

定常的な流れの中に物体が置かれている場合を考える。(5.23) で示した運動量保存則より物体に生じる力 $\mathbf{F}$ ($= (F_x, F_y)$) は

$$\mathbf{F} = -\rho \int_{C_{out}} \mathbf{u} U_n dl - \int_{C_{out}} p \mathbf{n} dl \quad (5.50)$$

と表される。ここで、(5.23) における dS は2次元問題の為 dl に、 S_{out} は C_{out} に置き換わっている。また、 $\mathbf{n}$ は外向き法線を正としていることに注意して、 $\mathbf{n} dl = (dy, -dx)$ である。 C_{out} における流速ベクトルを (u, v) 、圧力を p とし

て、またベルヌーイの定理よりよどみ圧力を p_0 として

$$p = p_0 - \frac{1}{2}\rho(u^2 + v^2) \quad (5.51)$$

が成り立つ。よって (5.50) は

$$\mathbf{F} = -\rho \int_{C_{out}} (u, v)(u, v) \cdot (dy, -dx) - \int_{C_{out}} \left\{ p_0 - \frac{1}{2}\rho(u^2 + v^2) \right\} (dy, -dx) \quad (5.52)$$

で与えられる。これを整理すると

$$\begin{aligned} F_x &= -\frac{1}{2}\rho \int_{C_{out}} (u^2 dy - 2uv dx - v^2 dy) \\ F_y &= -\frac{1}{2}\rho \int_{C_{out}} (u^2 dx + 2uv dy - v^2 dx) \end{aligned} \quad (5.53)$$

が得られる。尚、よどみ圧力 p_0 による力は周回積分より 0 となる。

(5.49) の複素速度を用いて上式と (5.54) は同等となる。

$$F_x - iF_y = \frac{i\rho}{2} \oint_C \left(\frac{df}{dz} \right)^2 dz \quad (5.54)$$

ここで、 C は物体を取り囲む任意の曲線である。この (5.54) のことを Blasius の公式と言う。複素速度ポテンシャルが求まれば直ちにこの式を用いて物体に作用する流体力を求めることが可能である。

Exercise

1. 図 5.13 の様に θ の傾斜を持つ管路内に密度 ρ の水が左上から右下に流量 Q で流れている. 断面積 A_2 の断面 ② と断面積 A_1 の断面 ① との圧力差 $p_2 - p_1$ と, これらに接続されている U 字管水銀マンメータの読みを求めなさい. 両断面間の管路長さは L とする. また, 水銀の比重は ρ_m , 重力加速度は g とする.

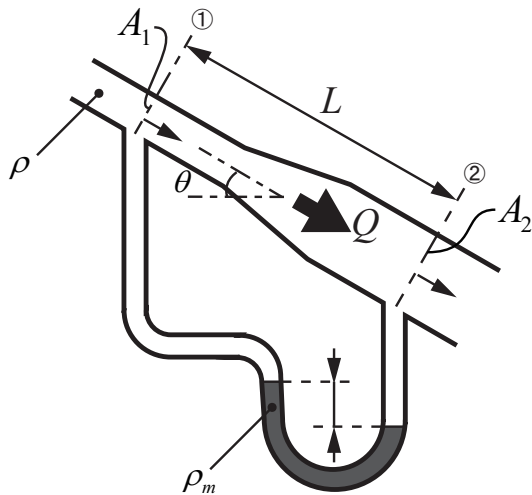


図 5.13: 問 1

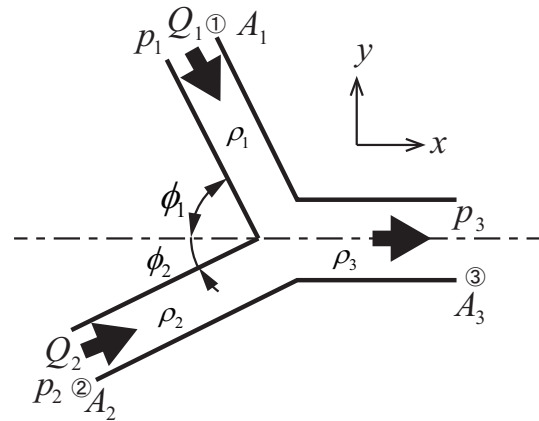


図 5.14: 問 2

2. 図 5.14 に示す様に 2 種類の異なる密度 ρ_1, ρ_2 の液体を混ぜ新たな密度 ρ_3 の液体を作る混合器がある. 混合器の管路入口 ①, ②, 管路出口 ③ の断面積を A_1, A_2, A_3 , それらの圧力を p_1, p_2, p_3 , 管路入口 ①, ② からの流量を Q_1, Q_2 とするとき, 流体が混合器に及ぼす x 軸および y 軸方向の力 f_x, f_y を求めよ. ただし, それぞれの入射角度は x 軸に対して ϕ_1, ϕ_2 とする.
3. 図 5.15 に示す様に隙間が h で幅が b の平行平板間の 2 次元流れにおいて, 断面 ① では圧力 p_1 , 速度 v の一様流れとして流入し, ある一定の距離 L を経ると壁面から受ける粘性の影響により, 断面 ② では圧力 p_2 で速度分布は放物線となる. (a) 断面 ② での速度分布を求めなさい. 但し, 速度 u は平板の中心で最大速度が $u = u_{max}$, 平板と接する面での速度は $u = 0$ とする. (b) 一様流れでの速度分布を持つ断面 ① と放物線の速度を持つ断面 ② に対して連続の式を立て, 速度 v と最大速度 u_{max} の関係を求めなさい. (c) 断面 ① と断面 ② の間に検査体積を取り, 運動量の法則から流体が平行平板に及ぼす力 f を求めなさい.

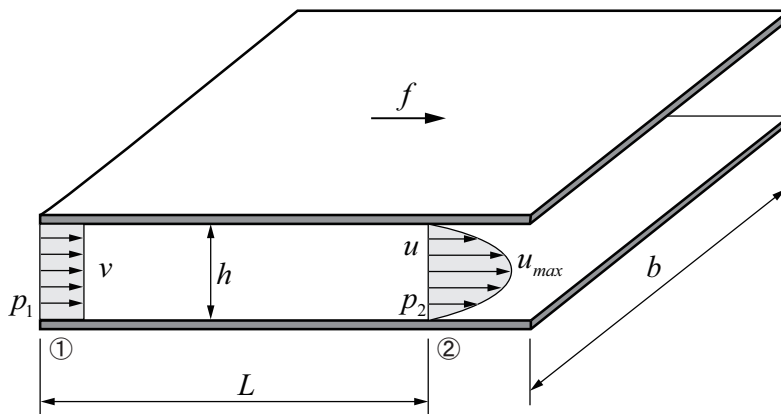


図 5.15: 問 3

4. 次の速度ポテンシャルを持つ2次元流れの速度成分 u, v を求めなさい. A, B は任意の定数とする. (a) $\Phi = Ax + By$, (b) $\Phi = Axy$, (c) $\Phi = A(x^2 + y^2)$, (d) $\Phi = Ax/r^2$, 但し, $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ である.
5. 次の速度分布を持つ2次元流れの流線を求めなさい. A は任意の定数とする. (a) $u = Ay, v = 0$ (b) $u = Ay, v = Ax$ (c) $u = Ax, v = -Ay$ (d) $u = Ay, v = -Ax$
6. A を任意の定数とし, 流速成分 $u = Ay, v = Ax$ である流れが連続の式及び渦無しの条件を満たすことを示しなさい.
7. 速度ポテンシャル

$$\Phi(x, y) = \frac{K}{2} (x^2 - y^2)$$

で与えられる2次元の流れ場がある. K は任意の定数とする. (a) x 方向流速 u および y 方向流速 v を求めなさい. (b) この流れ場の流れ関数を求めなさい. (c) この流れ場の流線を数本描きなさい. (d) この流れ場が渦無しであることを示しなさい.

第 6 章

完全流体の力学 (2 次元編)

5 章では完全流体の基礎的方程式である連続の式や Euler の運動方程式や Bernoulli の定理について述べた。これに加えて速度ポテンシャル、流れ関数というスカラー関数の概念を導入した。完全流体の力学において Euler の運動方程式や連続の式を解いて流速や圧力を求めることはまず行われない。連続の式一つ取り上げてみても、数学的な理論解法が存在しないからである。更には、Euler の運動方程式についても非線形項である対流項が存在しており、これも数学的な理論的解法が存在していない。一方で、速度ポテンシャルの概念を導入した場合、これを連続の式に代入することにより、Laplace 方程式になることを 5.6 節で知った。Laplace 方程式の一般的な解法は既に完成されており、解析的に速度ポテンシャルを求め、流速や圧力を求めることが可能となる。その為、完全流体の力学では速度ポテンシャルを求めることに帰着され、この手法を用いた完全流体の力学の問題はポテンシャル問題やポテンシャル理論とも呼ばれている。

本章では代表的な 2 次元ポテンシャル流れを取り上げる。2 次元のポテンシャル流れは複素速度ポテンシャルを用いることが出来、複素解析と組み合わせることにより、数学的な取り扱いを容易にし、流体運動の基礎的な知見を与えてくれる。

6.1 流れの基本要素

ポテンシャル理論の基本的な考え方として、様々な流れは流れの基本要素の重ね合わせにより表現する。速度ポテンシャルは Laplace 方程式の基本解である為、数学的にも重ね合わせが成り立つというところに由来している。基本要素の流れとして、(1) 一様流れ、(2) 湧き出し・吸い込み、(3) 渦糸、(4) 二重湧き出し等が挙げられる。これらは Laplace 方程式の基本解でもある。

(1) 一様流れ

今、図 6.1 に示すような一様流を考える。 U は流速であり、 x 軸に対して α 傾いているとする。流速 $\mathbf{u} = (u, v)$ はそれぞれ

$$\begin{aligned} u &= U \cos \alpha \\ v &= U \sin \alpha \end{aligned} \quad (6.1)$$

である。よって複素速度は

$$\frac{df}{dz} = U (\cos \alpha - i \sin \alpha) = U e^{-i\alpha} \quad (6.2)$$

となる。これを積分して一様流の複素速度ポテンシャルは

$$f(z) = U e^{-i\alpha} z \quad (6.3)$$

で表される。ちなみに、ここから実部、虚部を取り出せば速度ポテンシャル $\Phi(x, y)$ 、流れ関数 $\Psi(x, y)$ を求めることが出来、

$$\begin{aligned} \Phi(x, y) &= U (x \cos \alpha + y \sin \alpha) \\ \Psi(x, y) &= U (y \cos \alpha - x \sin \alpha) \end{aligned} \quad (6.4)$$

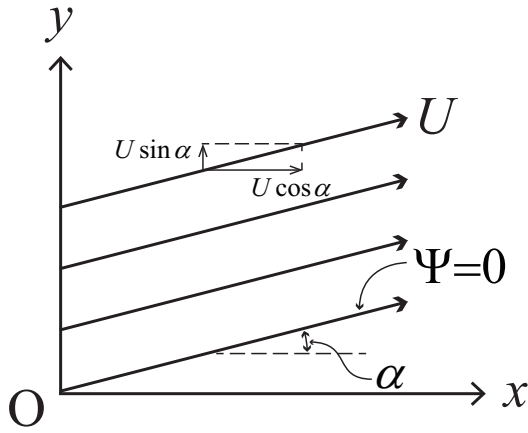


図 6.1: 一様流

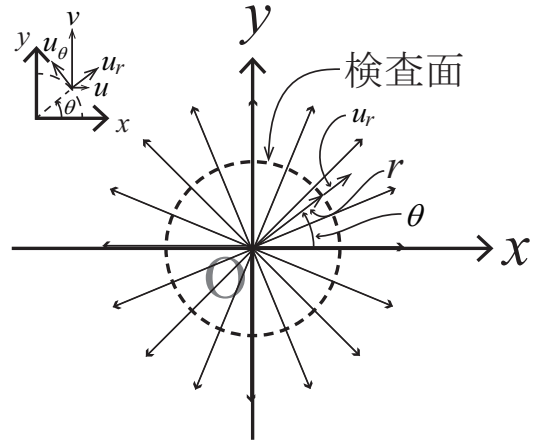


図 6.2: 湧き出し

を得る. ここから (6.4) の速度ポテンシャルを x 及び y で偏微分したものが各方向流速になっていることが容易に確かめられる. また, $\Psi = 0$ とした場合,

$$y = x \tan \alpha \quad (6.5)$$

を得る. $\Psi = \text{const.}$ が一本の流線を表しているので, 傾き $\tan \alpha$ の直線であることが確かめられる (6.1).

(2) 湧き出し・吸い込み

次の基本要素の流れとして湧き出し・吸い込みを取り上げる. 図 6.2 に示す様に, 原点 o から流れが放射方向に流れ出ている流れを考える. 流れ出る流量を m とする. 検査面を図の様に設け, ここでの半径方向流速を u_r として, 以下の関係が成り立つ.

$$m = \int_0^{2\pi} u_r r d\theta \quad (6.6)$$

u_r , r は検査面において一定であるので, 以下の式を得る.

$$u_r = \frac{m}{2\pi r} \quad (6.7)$$

また, u_r に直交する接線方向の流速 u_θ は $u_\theta = 0$ となる. 図中左上に示されている流速の成分分解の関係より, x 方向流速, y 方向流速の u , v は

$$\begin{aligned} u &= u_r \cos \theta - u_\theta \sin \theta = \frac{Q}{2\pi r} \cos \theta \\ v &= u_r \sin \theta + u_\theta \cos \theta = \frac{Q}{2\pi r} \sin \theta \end{aligned} \quad (6.8)$$

となる. 複素速度は

$$\frac{df}{dz} = \frac{m}{2\pi r} (\cos \theta - i \sin \theta) = \frac{m}{2\pi r e^{i\theta}} = \frac{m}{2\pi z} \quad (6.9)$$

となるので, 複素速度ポテンシャルは

$$f(z) = \frac{m}{2\pi} \log z \quad (6.10)$$

となる. 尚, $m > 0$ が湧き出しであり, $m < 0$ が吸い込みを意味する. また, 虚部を取り出した流れ関数は

$$\Psi(r, \theta) = \frac{m}{2\pi} \theta \quad (6.11)$$

であり, $\Psi = \text{const.}$ は原点から放射状に伸びた線を表す. このことからこの複素速度ポテンシャルは原点から流れ出る様子を表していることが確認できる.

(3) 渦糸

3つ目は渦糸である．図 6.3 に示す様に，原点 O を中心として半時計回りの渦糸が存在しているとする．この渦糸が作る半径 r における検査面での循環が Γ であるとする．4 章の (4.31) に示した循環の定義より， u_θ を回転流における接線方向流速として

$$\Gamma = \int_0^{2\pi} u_\theta r d\theta \quad (6.12)$$

となる． u_θ 及び r は検査面において一定であるから， u_θ は

$$u_\theta = \frac{\Gamma}{2\pi r} \quad (6.13)$$

となる．この流れにおいて半径方向流速 u_r は $u_r = 0$ となる．図 6.3 の左上図から分かるように， x 方向， y 方向流速は

$$\begin{aligned} u &= u_r \cos \theta - u_\theta \sin \theta = -\frac{\Gamma}{2\pi r} \sin \theta \\ v &= u_r \sin \theta + u_\theta \cos \theta = \frac{\Gamma}{2\pi r} \cos \theta \end{aligned} \quad (6.14)$$

であり，複素速度は

$$\frac{df}{dz} = -\frac{i\Gamma}{2\pi r} (\cos \theta - i \sin \theta) = -\frac{i\Gamma}{2\pi z} \quad (6.15)$$

が得られ，ここから渦糸の複素速度ポテンシャルは

$$f(z) = -\frac{i\Gamma}{2\pi} \log z \quad (6.16)$$

を得る．尚， $\Gamma > 0$ の時に反時計周りの渦糸を表し， $\Gamma < 0$ の時に時計回りの渦糸を表す．流れ関数 Ψ は，

$$\Psi(r, \theta) = -\frac{\Gamma}{2\pi} \log r \quad (6.17)$$

であり， $\Psi = \text{const.}$ は $r = \text{const.}$ となることから図 6.3 の様に半径が等しいところが渦糸の一本の流線を表す．

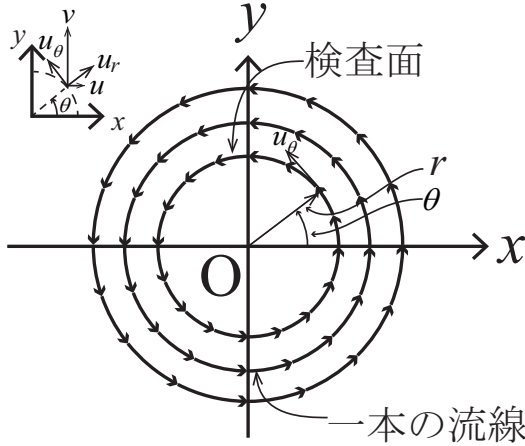


図 6.3: 渦糸

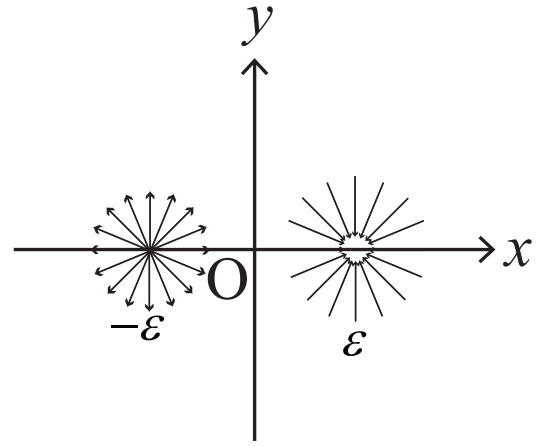


図 6.4: 二重湧き出しの導出

ポテンシャル流れは渦無しであるはずである．この渦糸はどうだろうか．この流れ場の渦度 ω は

$$\omega = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ -\frac{\Gamma}{2\pi r} \sin \theta & \frac{\Gamma}{2\pi r} \cos \theta & 0 \end{vmatrix} \quad (6.18)$$

である．ここで， $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ ， $\cos \theta = x/r$ ， $\sin \theta = y/r$ であるから，これを計算して $\omega = 0$ を得る．よって渦糸はポテンシャル理論の大原則である渦無しは満たしていることが分かる．渦糸は流体力学的には渦無しの渦とも呼ばれ

る。

(4) 二重湧き出し

基本要素の四つ目が二重湧き出しである。基本的な流れの要素の組み合わせから導出されるため基本要素には属さないようにも思われるが、極限の操作により一つのポテンシャルで表される為、やはり基本要素と言えよう。今、図 6.4 に示される様に $x = -\epsilon$ の位置に湧き出しを、 $x = \epsilon$ の位置に吸い込みを置く。この時の複素速度ポテンシャルは

$$\frac{m}{2\pi} \{\log(z + \epsilon) - \log(z - \epsilon)\} \quad (6.19)$$

となる。極限操作 ($\epsilon \rightarrow 0$) の為に以下のように式変形を行う。

$$\frac{m}{2\pi} \log \frac{z + \epsilon}{z - \epsilon} = \frac{m}{2\pi} \log \frac{1 + \frac{\epsilon}{z}}{1 - \frac{\epsilon}{z}} = \frac{m}{2\pi} \left\{ \log \left(1 + \frac{\epsilon}{z} \right) - \log \left(1 - \frac{\epsilon}{z} \right) \right\} \quad (6.20)$$

ϵ は後の極限操作で 0 に近づけるので ϵ/z 周りの Taylor 展開を考える。 $\log(1+x)$ の 1 次近似は下記であるから

$$\log(1+x) = x + \dots \quad (6.21)$$

これを利用する。また、湧き出しと吸い込みの距離 2ϵ を近づける。この際、湧き出しと吸い込みの大きさ m を調整しながら近づける。即ち、 $2\epsilon m \rightarrow \mu$ という極限にする。

$$f(z) = \lim_{2\epsilon m \rightarrow \mu} \frac{m}{2\pi} \left\{ \log \left(1 + \frac{\epsilon}{z} \right) - \log \left(1 - \frac{\epsilon}{z} \right) \right\} = \lim_{2\epsilon m \rightarrow \mu} \left\{ \frac{2\epsilon m}{2\pi z} \right\} = \frac{\mu}{2\pi z} \quad (6.22)$$

(6.22) を二重湧き出しの複素速度ポテンシャルという。以上の 4 つの基本要素を用いて様々な流れ解析が行うことが出来る。

二重湧き出しの特性をもう少し分析してみよう。簡単のために、仮に $\mu = 2\pi$ とする。速度ポテンシャル、流れ関数は

$$\begin{aligned} \Phi(x, y) &= \frac{1}{2\pi} \frac{x}{x^2 + y^2} \\ \Psi(x, y) &= -\frac{1}{2\pi} \frac{y}{x^2 + y^2} \end{aligned} \quad (6.23)$$

となる。 $\Psi = \text{const.}$ が一本の流線を表すから $\Psi = -1$ の時の流線を考えると、 $x^2 + (y - \frac{1}{2})^2 = \frac{1}{4}$ となり、図 6.5 に示すように中心点 $(0, \frac{1}{2})$ 、半径 $\frac{1}{2}$ の円が一本の流線となることが分かる。

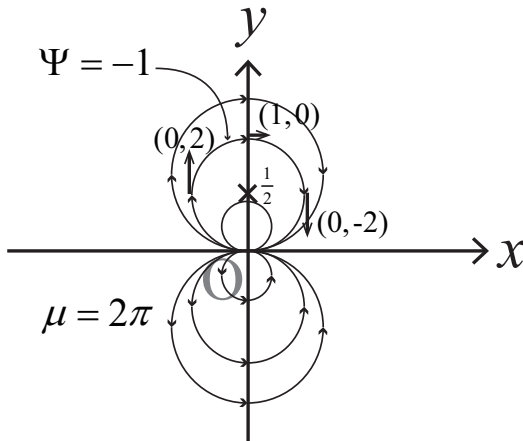


図 6.5: 二重湧き出し

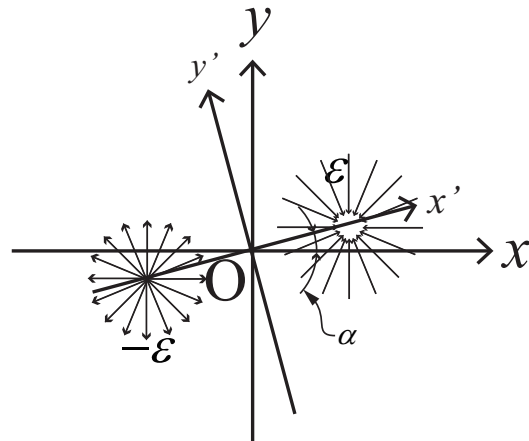


図 6.6: 軸が傾いた場合の二重湧き出し

速度ポテンシャルより、この二重湧き出しの流れ場の流速は

$$\begin{aligned} u(x, y) &= \frac{\partial \Phi}{\partial x} = \frac{-x^2 + y^2}{(x^2 + y^2)^2} \\ v(x, y) &= \frac{\partial \Phi}{\partial y} = \frac{-2xy}{(x^2 + y^2)^2} \end{aligned} \quad (6.24)$$

となる．流線上 $(x^2 + (y - \frac{1}{2})^2 = \frac{1}{4})$ では、

$$\begin{aligned} u(x, y) &= \frac{2y^2 - y}{y^2} \\ v(x, y) &= \frac{-2xy}{y^2} \end{aligned} \quad (6.25)$$

となる．これより、図 6.5 に示すように、 $(x, y) = (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ の位置における流速 (u, v) は $(0, 2)$ 、 $(x, y) = (0, 1)$ では $(1, 0)$ 、 $(x, y) = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ では $(0, -2)$ を得る．即ち、吹き出しを置いた方から吸い込みの方に流れが流れていることが確認できる．

この二重湧き出しは $y = 0$ に対して線対称なものであった．この軸が α 傾いている場合の二重湧き出しについて考えてみる．図 6.6 に示す様に、湧き出しと吸い込みを y' 上の $x' = -\epsilon$ 及び $x' = \epsilon$ に置く．湧き出し、吸い込みのそれぞれの位置は x, y 座標系だと $z = -\epsilon \cos \alpha - i\epsilon \sin \alpha = -\epsilon e^{i\alpha}$ 、 $z = \epsilon \cos \alpha + i\epsilon \sin \alpha = \epsilon e^{i\alpha}$ である．よって、これらを組み合わせた複素速度ポテンシャルは

$$\frac{m}{2\pi} \log(z + \epsilon e^{i\alpha}) - \frac{m}{2\pi} \log(z - \epsilon e^{i\alpha}) \quad (6.26)$$

となる．この極限は先程と同様の方法に従う．即ち、

$$\frac{m}{2\pi} \log \frac{z + \epsilon e^{i\alpha}}{z - \epsilon e^{i\alpha}} = \frac{m}{2\pi} \log \frac{1 + \frac{\epsilon e^{i\alpha}}{z}}{1 - \frac{\epsilon e^{i\alpha}}{z}} = \frac{m}{2\pi} \left\{ \log \left(1 + \frac{\epsilon e^{i\alpha}}{z} \right) - \log \left(1 - \frac{\epsilon e^{i\alpha}}{z} \right) \right\} \quad (6.27)$$

と、変形し、 $\epsilon \rightarrow 0$ の極限を考えれば $\frac{\epsilon e^{i\alpha}}{z}$ は大変小さいので、Taylor 展開の 1 次近似を用いて次の極限計算となる．この際、 $2\epsilon m \rightarrow \mu$ を用いている．

$$f(z) = \lim_{2\epsilon m \rightarrow \mu} \frac{m}{2\pi} \left(\frac{2\epsilon e^{i\alpha}}{z} \right) = \frac{\mu}{2\pi z} e^{i\alpha} \quad (6.28)$$

この (6.28) が軸が傾斜している時の二重湧き出しとなる．

湧き出しと吸い込みとを組み合わせ、極限まで近づけることで二重湧き出しが求められた．更に分析を進めることで湧き出しと二重湧き出しはどのように数学的に関係づけられるのかを考えてみたい．このことを理解することは Green の定理を用いた境界要素法の物理的な解釈に繋がる．海洋工学において、境界要素法は浮体に生じる波力や浮体が波の中で揺れる際の放射波 (radiation wave) 等の解析で用いられる有用な手法である．

任意の 2 点 $Q(x_Q, y_Q)$ 及び $Q_1(x_{Q1}, y_{Q1})$ に湧き出しと、吸い込みが置かれている場合、点 $P(x, y)$ における速度ポテンシャルは

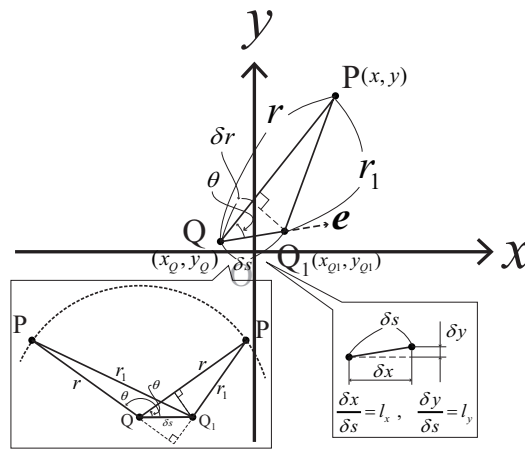


図 6.7: 湧き出しと二重湧き出しの数学的関係

$$\Phi(x, y) = \frac{m}{2\pi} (\log r - \log r_1) = -\frac{m}{2\pi} (\log r_1 - \log r) \quad (6.29)$$

である。ここで、 $r = \sqrt{(x - x_Q)^2 + (y - y_Q)^2}$ であり、 $r_1 = \sqrt{(x - x_{Q1})^2 + (y - y_{Q1})^2}$ である。今、 δ を点 Q_1 から点 Q の物理量の差分を表すものとすれば、上式は

$$\begin{aligned}\Phi(x, y) &= -\frac{m}{2\pi} \delta(\log r) = -\frac{m}{2\pi} \left\{ \frac{\partial}{\partial x_Q} (\log r) \delta x_Q + \frac{\partial}{\partial y_Q} (\log r) \delta y_Q \right\} = -\frac{Q}{2\pi} \delta \mathbf{r}_Q \cdot \text{grad}_Q (\log r) \\ &= -\frac{m\delta s}{2\pi} \mathbf{e} \cdot \text{grad}_Q (\log r) = \frac{m\delta s}{2\pi} \mathbf{e} \cdot \text{grad} (\log r) = \frac{m\delta s}{2\pi} \frac{\partial}{\partial s} (\log r)\end{aligned}\quad (6.30)$$

となる。上式において、 $\delta x_Q = x_{Q1} - x_Q$ 、 $\delta y_Q = y_{Q1} - y_Q$ 、 $\delta \mathbf{r}_Q = (\delta x_Q, \delta y_Q)$ である。また、線分 QQ_1 の大きさを δs 、 QQ_1 の単位方向ベクトルを $\mathbf{e}$ として、 $\overrightarrow{QQ_1} = \delta \mathbf{r}_Q = \mathbf{e} \delta s$ を用いている。 grad_Q は $\left(\frac{\partial}{\partial x_Q}, \frac{\partial}{\partial y_Q} \right)$ と定義され、 $\text{grad} \equiv \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y} \right)$ の為、 $+-$ が入れ替わった。最後に、 $\mathbf{e} \cdot \text{grad}$ は $\mathbf{e} = (l_x, l_y)$ として、

$$\frac{\partial}{\partial s} = \frac{\partial x}{\partial s} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial s} \frac{\partial}{\partial y} = l_x \frac{\partial}{\partial x} + l_y \frac{\partial}{\partial y} = \mathbf{e} \cdot \text{grad} \quad (6.31)$$

の関係を用いている。

また、

$$\Phi(x, y) = -\frac{m}{2\pi} \delta(\log r) = -\frac{m}{2\pi} \frac{\delta r}{r} = \frac{m\delta s \cos \theta}{2\pi r} \quad (6.32)$$

としても表すことが出来る。ここで、 $\delta r = r_1 - r = -\delta s \cos \theta$ の関係を用いている (図 6.7 左下参照)。 $m\delta s \rightarrow \mu$ としたものが二重湧き出しであった。更に、(6.32) は $\mu = 2\pi$ 、 $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ 、 $\cos \theta = x/r$ として考えれば (6.23) と同じだと分かる。また、(6.32) の軸は $\overrightarrow{QQ_1}$ の方向であることをここで改めて言及しておくたい。

以上の (6.30) 及び (6.32) より、湧き出し及び吸い込みの方向微分したもの ($\partial/\partial s(\log r)$) が二重湧き出し ($\cos \theta/r$) であり、またその方向は二重湧き出しの軸に一致することが確認できる。

2次元の境界要素法における境界積分方程式では n を法線として

$$\frac{\partial}{\partial n} (\log r) \quad (6.33)$$

という項が生じる。これは法線方向に軸を持つ二重湧き出しを意味している。

6.2 一様流中に置かれた円柱

図 6.8 に示されるように半径 a の円柱が流速 U の一様流れ中に置かれている流れを考えてみたい。ポテンシャル理論は基礎的な流れの組み合わせによって様々な流れを表すことは既に 6.1 節で述べた。この流れ場は図 6.9 に示すように一様流と二重湧き出しの組み合わせで表されることが知られている。また、流れは十分に時間が経って定常な流れになっているとし、時間 t に依らないものとする。この複素速度ポテンシャルは

$$f(z) = Uz + \frac{\mu}{2\pi z} \quad (6.34)$$

である。この段階で二重湧き出しの強さ μ は未知数である。この μ の強さを境界条件に合わせて求めることで一様流中に置かれる円柱周りの複素速度ポテンシャルが求めることがポテンシャル理論の特徴である。

この場合の境界条件は u_r を円柱半径方向流速として、円柱表面上 ($r = a$) において $u_r = 0$ である。即ち、円柱から流体が流れ出てくことは無いという条件であるが、4.2 節で示したことを基に示してみよう。(4.10) より、 $r = a$ において

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = (u, v) \cdot (\cos \theta, \sin \theta) = 0 \quad (6.35)$$

である。図 6.9 の右下図より、 $u \cos \theta + v \sin \theta = u_r$ であるから、ここからも円柱上での境界条件が $u_r = 0$ であることが示される。

さて、この境界条件を用いて当初の目的であった二重湧き出しの強さ μ を求める。未知数が一つであるから一つの境界条件で十分である。複素速度ポテンシャルから実部を取り出せば速度ポテンシャルを求めることが出来る。極座標 $z = re^{i\theta}$ を用いて

$$\Phi(r, \theta) = \left(Ur + \frac{\mu}{2\pi r} \right) \cos \theta \quad (6.36)$$

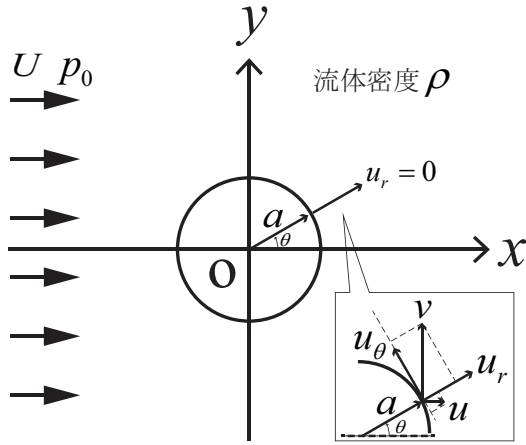


図 6.8: 一様流中に置かれた円柱

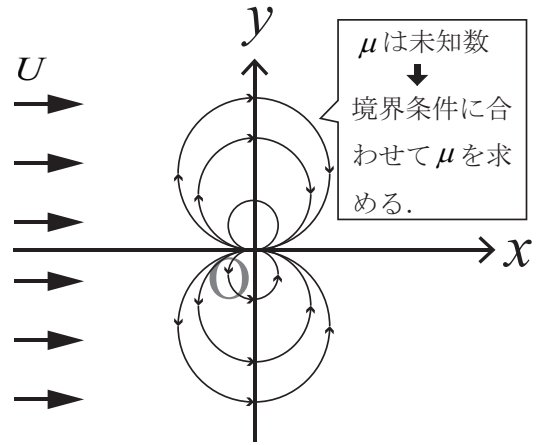


図 6.9: 一様流と二重湧き出しの組み合わせ

が速度ポテンシャルとして得られる. $u_r = \frac{\partial \Phi}{\partial r}$ であるので, 半径方向流速は

$$u_r = \frac{\partial \Phi}{\partial r} = \left(U - \frac{\mu}{2\pi r^2} \right) \cos \theta \quad (6.37)$$

で与えられる. $r = a$ で $u_r = 0$ が境界条件であるから

$$\mu = 2\pi a^2 U \quad (6.38)$$

となる. 以上より一様流中の複素速度ポテンシャルは

$$f(z) = U \left(z + \frac{a^2}{z} \right) \quad (6.39)$$

となる. また, 速度ポテンシャルは

$$\Phi(r, \theta) = U \left(r + \frac{a^2}{r} \right) \cos \theta \quad (6.40)$$

となる.

ポテンシャル理論の一つの特徴が複素速度ポテンシャルなり速度ポテンシャルを求めることによってここから流れ場における各点の流速なり, 圧力なりが陽に求まることである. 流体力学の目的の一つが流れ場や流速分布の可視化や構造物に生じる流体荷重を求めることにある. ここではまず円柱周りにおける流速分布について求めてみよう.

$r = a$ において境界条件からも明らかなように半径方向流速 u_r は 0 である. 接線方向流速 u_θ は

$$u_\theta|_{r=a} = \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \Big|_{r=a} = 2U \sin \theta \quad (6.41)$$

となる. 図 6.10 に流速分布を示す. u_θ は反時計回りが正であることに注意を要する. 流速が 0 となる点のことをよどみ点と呼ぶ. 円柱周りであれば $\theta = 0, 180^\circ$ がよどみ点である. 次に圧力分布については Bernoulli の定理から考える. 十分上流の流速は U , 圧力は p_0 である. 円柱周りの流速は $\sqrt{u_r^2 + u_\theta^2} = u_\theta$ であり, 圧力を p_θ として,

$$\frac{1}{2} \rho U^2 + p_0 = \frac{1}{2} \rho (-2U \sin \theta)^2 + p_\theta \quad (6.42)$$

が成り立つ. ここで流体の密度を ρ とした. これより円柱周りの圧力 p_θ は

$$p_\theta = p_0 + \frac{1}{2} \rho U^2 (1 - 4 \sin^2 \theta) \quad (6.43)$$

となる.

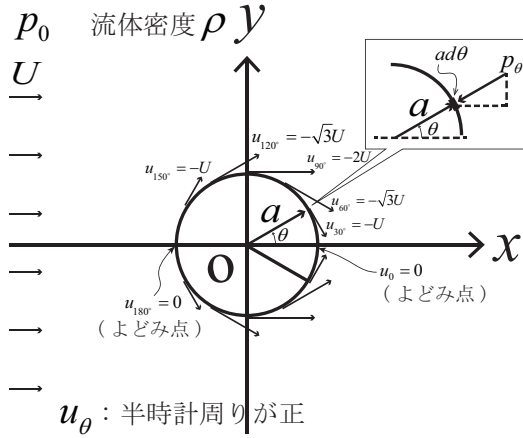


図 6.10: 円柱表面における流速分布

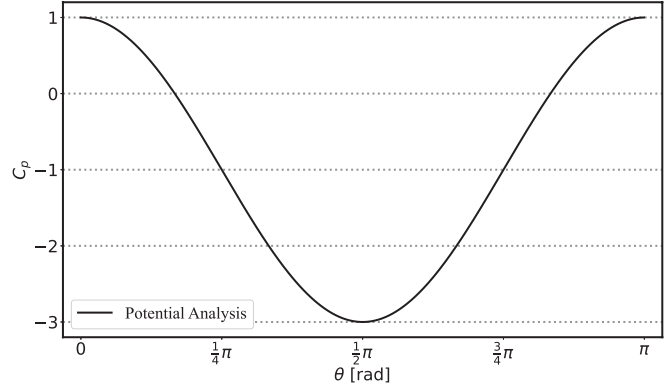


図 6.11: 円柱表面の圧力係数

円柱周りの圧力が求められたのでここから円柱に生じる流体力を求めることが出来る．図 6.10 の右上図の關係に留意して，また，その流体力を F_x, F_y として，以下を得る．

$$\begin{aligned} F_x &= - \int_0^{2\pi} p_\theta \cos \theta a d\theta = -a \int_0^{2\pi} \left\{ p_0 + \frac{1}{2} \rho U^2 (1 - 4 \sin^2 \theta) \right\} \cos \theta d\theta = 0 \\ F_y &= - \int_0^{2\pi} p_\theta \sin \theta a d\theta = -a \int_0^{2\pi} \left\{ p_0 + \frac{1}{2} \rho U^2 (1 - 4 \sin^2 \theta) \right\} \sin \theta d\theta = 0 \end{aligned} \quad (6.44)$$

流れの中に置かれた円柱に生じる流体力が 0 というのは現実の現象にはそぐわない．しかしポテンシャル理論で計算すると 0 になってしまう．この実際との異なる現象をダランベールのパラドックスと言う．このパラドックスは何故生じるかを少し考えてみたい．円柱表面での圧力を無次元化してみよう．上流圧力からの上昇分 $p_\theta - p_0$ を動圧 ($\frac{1}{2} \rho U^2$) で割ったものを圧力係数 C_p と定義すると以下を得る．

$$C_p = \frac{p_\theta - p_0}{\frac{1}{2} \rho U^2} = 1 - 4 \sin^2 \theta \quad (6.45)$$

図 6.11 に円柱表面における圧力係数を示す．横軸が θ である． $0 \sim \pi$ のみ示したのは $\pi \sim 2\pi$ も全く同じであるからである．図から分かるように，上流面 ($\frac{1}{2}\pi \sim \pi$) と下流面 ($0 \sim \frac{1}{2}\pi$) で対称な圧力係数となっている．つまり，上流面で円柱を押す流体力と下流面で円柱を押す流体力が釣り合っている状態となっている．これを積分しても 0 となるのは当たり前と言える．

半径方向流速 u_r , 接線方向流速 u_θ と速度ポテンシャル Φ の関係

半径方向流速 u_r , 接線方向流速 u_θ と速度ポテンシャルとの関係は

$$u_r = \frac{\partial}{\partial r} \Phi(r, \theta), u_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \Phi(r, \theta) \quad (6.46)$$

で表される. これを導いてみる. u_r, u_θ は図 6.8 における右下図より以下の関係を得る. また, 速度ポテンシャルと x 方向流速 u , y 方向流速 v との関係を用いると以下を得る.

$$\begin{aligned} u_r &= u \cos \theta + v \sin \theta = \frac{\partial \Phi}{\partial x} \cos \theta + \frac{\partial \Phi}{\partial y} \sin \theta \\ u_\theta &= -u \sin \theta + v \cos \theta = -\frac{\partial \Phi}{\partial x} \sin \theta + \frac{\partial \Phi}{\partial y} \cos \theta \end{aligned} \quad (6.47)$$

chain rule, 及び $r = \sqrt{x^2 + y^2}, \theta = \arctan(y/x)$ の関係を用いて以下を得る.

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi}{\partial x} &= \frac{\partial \Phi}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial x} = \frac{\partial \Phi}{\partial r} \cos \theta - \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \frac{\sin \theta}{r} \\ \frac{\partial \Phi}{\partial y} &= \frac{\partial \Phi}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial y} + \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial y} = \frac{\partial \Phi}{\partial r} \sin \theta + \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \frac{\cos \theta}{r} \end{aligned} \quad (6.48)$$

(6.48) を (6.47) に代入して整理すると (6.46) の関係が得られる.

6.3 一様流中に置かれた平板翼の揚力

揚力の発見は人類の歴史を大きく変えたと言っても過言ではない. 飛行機という発明により, 人類は空を飛び高速で移動できるようになった. 1.1 節や 1.2 節において述べたが, 古くからあるヨットやオランダに見られる風車で揚力が使われているように, 人類は揚力自体は経験的に使っていた. 一方で, 揚力の理論的な解釈や, 実験による揚力の測定は 20 世紀に入ってからである.

ここでは平板翼の揚力の解析方法について述べる. 平板を数式で表わし境界値問題を解くことは難しいので写像を使ってこの問題を解く.

(1) Joukowski 変換

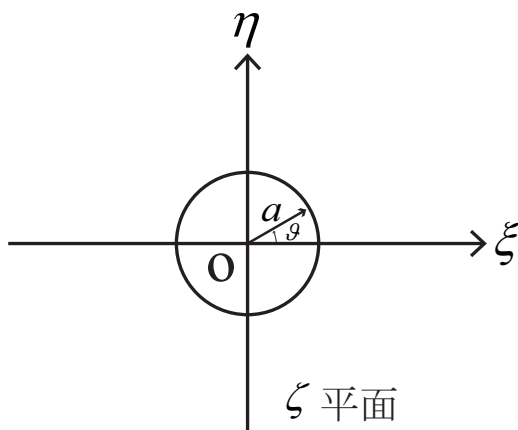


図 6.12: ζ 平面に置かれた円柱

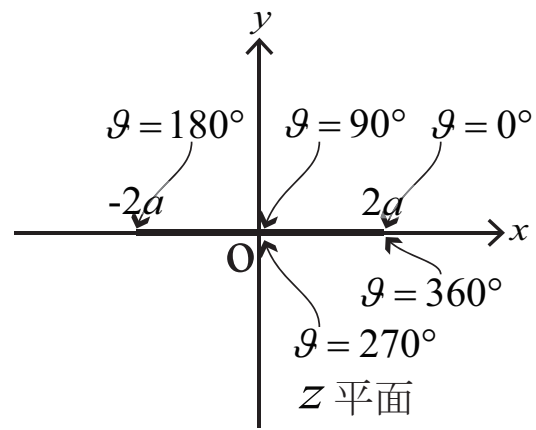


図 6.13: z 平面に写像された平板

$$z = \zeta + \frac{a^2}{\zeta} \quad (6.49)$$

という ζ 平面から z 平面への写像関数を Joukowski 変換という. 図 6.12 に示されるように円が中心 $(0,0)$ に置かれて

いる例を考える．この円は $\zeta = ae^{i\vartheta}$ と表わされる．(6.49) に代入して $z = 2a \cos \vartheta$ が得られる．これは実部のみ残っていることが分かる．図 6.13 に示される様に，例えば ζ 平面の円上の $\vartheta = 0^\circ$ は z 平面において $(2a, 0)$ に写されることが分かる． $0 \leq \vartheta \leq 360$ であるので ζ 平面で円であったものが z 平面では長さ $4a$ の線分 (平板) になることが分かる．

ここでは詳細は示さないが， ζ 平面における円の中心をずらすことにより Joukowski 翼が z 平面に生じることが知られている．

また，幾何学的な写像のみならず流れ場も写像される．例えば z 平面において $f(z) = Uz$ は流速 U の一様流れを表すわけであるが，平板 (線分) が置かれている場合も迎角が無ければ流れは一様流と同じである． ζ 平面に写像すると $f(\zeta) = U(\zeta + \frac{a^2}{\zeta})$ となり， z 平面で平板周り的一様流れが ζ 平面において一様流中の円柱周りの流れになっていることが確認される．

(2) 一様流中の平板周りの流れと Kutta の条件

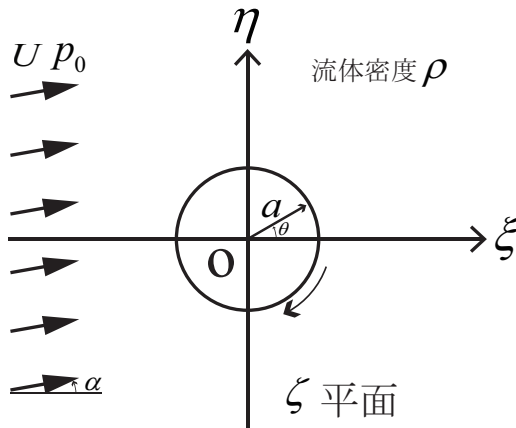


図 6.14: 一様流中の回転円柱 (ζ 平面)

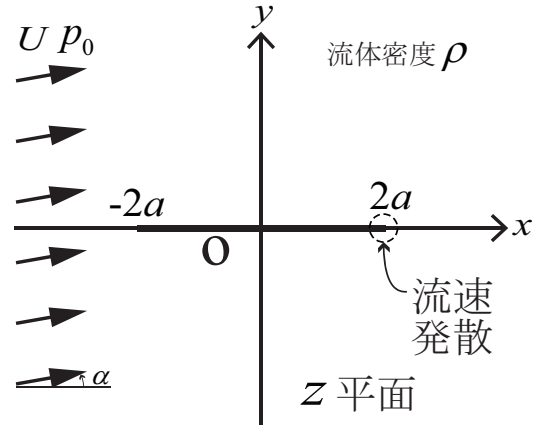


図 6.15: 一様流中の平板 (z 平面)

ζ 平面において

$$f(\zeta) = U \left(e^{-i\alpha} \zeta + \frac{a^2 e^{i\alpha}}{\zeta} \right) + \frac{i\Gamma}{2\pi} \log \zeta \quad (6.50)$$

という流れ場を考える．これは ζ 平面において図 6.14 に示す様に ξ 軸に対して α の角度から流入する一様流中に半径 a の回転円柱があり，回転円柱が Γ の循環を作り出している流れの複素速度ポテンシャルである．

これを z 平面に写像することを考えると， $4a$ の平板が迎角 α の一様流中に置かれている流れと言うことになる．しかし，循環 Γ は何を意味しているのであろうか．それを考える上で重要となるのが $z = 2a$ における流速である． $z = 2a$ における複素速度は

$$\left. \frac{df(z)}{dz} \right|_{z=2a} = \left. \frac{df(\zeta)/d\zeta}{dz/d\zeta} \right|_{\zeta=a} = \left. \frac{U(e^{-i\alpha} - a^2 e^{i\alpha}/\zeta^2) + i\Gamma/(2\pi\zeta)}{1 - a^2/\zeta^2} \right|_{\zeta=a} \quad (6.51)$$

である．分母からも分かるように $\zeta = a$ 即ち翼端において流速が発散することが分かる．これは現実とは乖離がある．(図 6.15) これを解消するために分子の値が 0 となるように Γ の値を定める．これを Kutta の条件と言う．

$$\Gamma = 4\pi a U \sin \alpha \quad (6.52)$$

である時に分子の値が 0 となる．このように Γ を決めることにより (6.51) は $0/0$ の不定形となる．実際に翼端の流速はロピタルの定理により以下のように計算することが出来る．

$$\left. \frac{df(z)}{dz} \right|_{z=2a} = \lim_{\zeta \rightarrow a} \frac{2Ua^2 e^{i\alpha}/\zeta^3 - i\Gamma/(2\pi\zeta^2)}{2a^2/\zeta^3} = U \cos \alpha \quad (6.53)$$

即ち，翼端で $U \cos \alpha$ となり，これは一様流の x 方向流速に等しい．Kutta の条件を課すことで翼端で理にかなった結果を得られることとなる．実際の実験においても翼端で流体は接して離れる現象が見られる．ところで循環を加えた

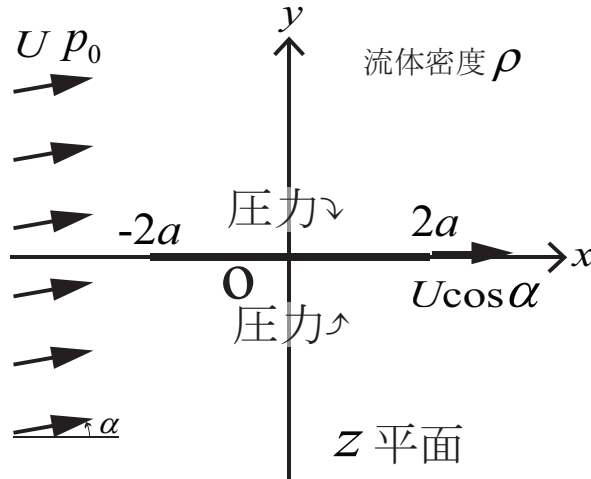


図 6.16: Kutta の条件を課した後の翼端の状況

(6.50) のモデルは一体何を意味していたのであろうか．それは翼上面と翼下面の流速差を表していたことになる．図 6.16 に示される様に翼上面では一様流と反時計回りの循環により流速が上がり結果として Bernoulli の定理より圧力が小さくなり，翼下面では流速が下がり圧力が大きくなることとなる．この圧力差が揚力を生み出したこととなる．

(3) 揚力計算

複素速度ポテンシャルが得られたので，翼に生じる風荷重を計算してみよう．本来は物体表面圧力を積分し求めることも可能かもしれないが，5.7 において示された Blasius の公式により物体を取り囲む任意の閉曲線の周回積分により求めることが可能である．即ち

$$F_x - iF_y = \frac{i\rho}{2} \oint_C \left(\frac{df}{d\zeta} \right)^2 \frac{d\zeta}{dz} \quad (6.54)$$

であり， $df(\zeta)/d\zeta$ 及び $dz/d\zeta$ の計算結果を代入し

$$F_x - iF_y = \frac{i\rho}{2} \oint_C \frac{\{U(e^{-i\alpha} - a^2 e^{i\alpha}/\zeta^2) + i\Gamma/(2\pi\zeta)\}^2}{1 - a^2/\zeta^2} d\zeta \quad (6.55)$$

となる．これを計算して，

$$F_x - iF_y \approx \frac{i\rho}{2} \oint_C \{U(e^{-i\alpha} - a^2 e^{i\alpha}/\zeta^2) + i\Gamma/(2\pi\zeta)\}^2 (1 + a^2/\zeta^2 + \dots) d\zeta \quad (6.56)$$

となる．ここで，無限等比級数の和の公式を用いている．留数定理より $1/\zeta$ の項のみ残ることは明らかである．以上より

$$F_x - iF_y \approx \frac{i\rho}{2} \oint_C \frac{i\Gamma}{\pi} U e^{-i\alpha} \frac{1}{\zeta} d\zeta = \frac{-\rho U e^{-i\alpha} \Gamma}{2\pi} \times 2\pi i \text{Res}\left[\frac{1}{\zeta}, 0\right] = -i\rho U \Gamma e^{-i\alpha} \quad (6.57)$$

$$F_x = -\rho U \Gamma \sin \alpha, \quad F_y = \rho U \Gamma \cos \alpha \quad (6.58)$$

となる．流れに垂直な成分を L ，流れに水平な成分を D とすれば

$$L = \rho U \Gamma, \quad D = 0 \quad (6.59)$$

となる．この流れに垂直な成分 L を揚力，水平な成分 D を抗力と言う．摩擦等の成分を考慮していない為に抗力は 0 となっているが，循環を考えたことで揚力が理論的に得られたことになる．揚力は先ほど得られた循環 Γ より

$$L = 4\pi\rho a U^2 \sin \alpha \quad (6.60)$$

となる．流れによる力是一般的に代表する速度 U の 2 乗，代表する断面積 S ，流体密度 ρ に比例する．これで無次元化した C_L ， C_D は

$$C_L = \frac{L}{\frac{1}{2}\rho S U^2} = 2\pi\alpha, \quad C_D = \frac{D}{\frac{1}{2}\rho S U^2} \quad (6.61)$$

を得る．代表面積 S は翼弦長 $4a$ ，翼幅 1 として $S = 4a$ とした．また， α は小さい為， $\sin \alpha \approx \alpha$ とした．

6.4 変数分離法による Laplace 方程式の一般解

既に述べてきた一様流や、湧き出しや、渦、二重湧き出しといった流れの基本要素は直感的な解釈から速度ポテンシャルを導出してきた。また、一様流中に置かれた円柱周りの流れ場も基本要素を組み合わせ、境界条件を用いて目的の流れの速度ポテンシャル等を求めた。速度ポテンシャルは本来的には Laplace 方程式を満足しているはずである。実際に意識はしなかったが、流れの基本要素は Laplace 方程式を満足している。ここでは、Laplace 方程式の一般解を変数分離法によって導出しておく。特に、極座標系がよく使われるので極座標系における Laplace 方程式の一般解を導出する。

Laplace 方程式の極座標表示系は

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \theta^2} = 0 \quad (6.62)$$

である。この偏微分方程式を変数分離法を用いて解く。即ち、

$$\Phi(r, \theta) = R(r)\Theta(\theta) \quad (6.63)$$

として整理すれば、

$$\frac{r}{R} \frac{d}{dr} (rR') = -\frac{\Theta''}{\Theta} = n^2 \quad (6.64)$$

を得る。ここで、 n は正の整数である。 n を正の整数としたのは Θ が 2π の周期関数である三角関数が選ばれるためである。 $R(r)$ 及び $\Theta(\theta)$ に関する常微分方程式は

$$\begin{cases} r^2 R'' + rR' - n^2 R = 0 \\ \Theta'' + n^2 \Theta = 0 \end{cases} \quad (6.65)$$

となる。簡単のために流れが x 軸について対称であるとすれば、 $\Theta(\theta)$ の一般解は

$$\Theta(\theta) = \cos n\theta \quad (6.66)$$

となる。 $R(r)$ については $R(r) = r^\alpha$ と置き、得られた常微分方程式に代入すれば $\alpha = \pm n$ を得る。

また、 $n = 0$ の時、 $R(r)$ の一般解は $\log r$ となる。以上より、一般解は

$$\Phi(r, \theta) = \sum_{n=1}^{\infty} \cos n\theta \left(A_n r^n + \frac{B_n}{r^n} \right) + A_0 + B_0 \log r \quad (6.67)$$

となる。

Exercise

1. 流速 2 の一様流中に半径 1 の円が原点に置かれているとする. この時の流線を描きなさい.
2. 原点 o に吸込み (吸込み強さ Q) と反時計回りの渦 (循環 Γ) が組み合わされた $x-y$ 平面上の 2 次元の流れを考える. $Q = 8$, $\Gamma = 4\pi$ である時, 点 $(x, y) = (1, 0)$ における半径方向流速及び周方向流速を求めなさい. また, この流れ場の流線と流れ関数の値を示しなさい.
3. 半径 a の円柱が x 正の方向に速度 $U(t)$ で移動しているとする. この移動速度は時間の関数である. 円柱に生じる力を求めなさい.

第 7 章

略解

第 2 章

1. 質量 1.026kg, 密度 1026kg/m³, 比重 1.026.
2. 13540kg/m³.
3. $\mu \frac{2\pi dl v}{(D-d)}$.
4. $\mu \frac{\pi d^3 l \omega}{2(D-d)}$.
5. $\mu \frac{2\pi\omega}{h} \int_0^{D/2} r^3 dr = \frac{\mu\pi\omega D^4}{32h}$.
6. 0.0448%.
7. 等エントロピー変化なので質量は一定として断熱変化をしている状態である. 気体の質量を m として気体の比体積 v は $v = \frac{V}{m}$ となる. また, 比体積を用いて $K = -v \frac{dp}{dv}$. 等エントロピー変化では $pv^k = \text{一定}$ の関係であるから, $v^k dp + kp v^{k-1} dv = 0$ を得る. この関係を代入して $K = kp$ が得られる.
8. 0.9955...(ほとんど変化しない.)

第 3 章

1. A 点 0, B 点 9.02kPa, C 点 33.5kPa, D 点 100kPa.
2. ゲージ圧力は 499.8kPa, 絶対圧力は 601.1kPa.
3. 左右の圧力の釣り合いは $\rho g(H_1 + H) = \rho g(H_2 + H - H') + s_m \rho g H'$. よって $H' = \frac{H_1 - H_2}{s_m - 1}$.
4. z 軸の原点を海底にするとモーメントの釣り合いのみ考えれば良いので楽であるが, 敢えて本書通り水面にする. 図 7.1 に力とモーメントの模式図を示す. 水圧による全圧力 F_w は $F_w = \int_{-H}^0 (-\rho g z) dz = \rho g H^2 / 2$. モーメント M_w は $M_w = \int_{-H}^0 (-\rho g z) z dz = -\rho g H^3 / 3$. ゲートにおける力の釣り合いは $F_w - F_1 - F_2 = 0$, 原点回りのモーメントの釣り合いは $M_w - F_1(L - H) + F_2 H = 0$ となる. 連立方程式を解いて $F_1 = \frac{\rho g H^3}{6L}$.

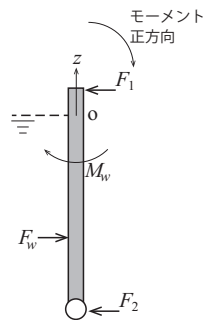


図 7.1: 問 4 の力とモーメントの模式図

5. 長方形の図心 $z_c = (1/ab) \int_{-a}^0 z b dz = -a/2$ (原点は長方形上辺の中心かつ上向き正), 断面二次モーメント $I = \int_{-a}^0 z^2 b dz = a^3 b/3$ (原点は同左). 三角形の断面一次モーメントは $(-b/a) \int_{-a}^0 z^2 dz = -a^2 b/3$ (原点は三角形の頂点かつ上向き正), よって図心は $z_c = -\frac{a^2 b}{3} \div \frac{ab}{2} = -2a/3$. 断面二次モーメント $I = (-b/a) \int_{-a}^0 z^3 dz = a^3 b/4$ (原点は同左). 問題集や教科書によっては原点が図心である場合も多いので注意が必要. また, どのような座標系にも対応できるように練習しておくが良い. 検算は平行軸の定理を用いて可能である.
6. 図 7.2 に示すように座標原点を水底に設ける. 水面に置くことも可能だが, 計算が煩雑になる. 原点まわりの水圧によるモーメント M_w は

$$M_w = \int_0^{\frac{H-h}{\sin \alpha}} \rho g (H - z' \sin \alpha) z' dz' = \frac{\rho g}{6 \sin^2 \alpha} (H - h)^2 (H + 2h)$$

となる. 原点周りのモーメントの釣り合いから

$$F = \frac{\rho g}{6 \sin^2 \alpha} (H - h) (H + 2h)$$

が得られる.

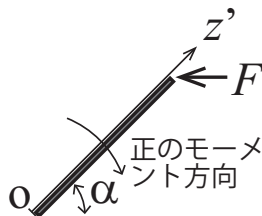


図 7.2: 問 6 の座標系

7. $d = 0.231\text{m}$, $\overline{\text{GM}} = \overline{\text{BM}} + \overline{\text{KB}} - \overline{\text{KG}} = 0.353 + 0.118 - 0.325 = 0.121\text{m}$. 質量 m の球を乗せた時の喫水を d' とし, 排水体積の関係から $944.4\text{kg} + m = 4 \times 1000 \times d'$. $\overline{\text{GM}} = 0.333/(4d') + d'/2 - (316.37 + m)/(944.4 + m) < 0$ の条件から $m > 172\text{kg}$. 即ち 172kg の球を置くと転覆に至る.

第5章

1. 連続の式とベルヌーイの定理より

$$\frac{1}{2} \rho \left(\frac{Q}{A_1} \right)^2 + \rho g L \sin \theta + p_1 = \frac{1}{2} \rho \left(\frac{Q}{A_2} \right)^2 + p_2$$

マノメータの関係より, $p_1 + \rho_m g h = p_2 + \rho g h$ が得られる. よって,

$$h = \frac{\rho Q^2}{2g(\rho_m - \rho)} \left\{ \frac{1}{A_1^2} - \frac{1}{A_2^2} \right\} + \frac{\rho L \sin \theta}{(\rho_m - \rho)}$$

2. 混合器に生じる x 方向の荷重を f_x , y 方向の荷重を f_y として, 運動量保存則よりそれぞれの成分について

$$\begin{aligned} \rho(Q_1 + Q_2)^2/A_3 - (\rho_1 Q_1^2/A_1 \cos \phi_1 + \rho_2 Q_2^2/A_2 \cos \phi_2) &= -f_x + (p_1 A_1 \cos \phi_1 + p_2 A_2 \cos \phi_2) - p_3 A_3 \\ -(\rho_1 Q_1^2/A_1 \sin \phi_1 + \rho_2 Q_2^2/A_2 \sin \phi_2) &= -f_y + (-p_1 A_1 \sin \phi_1 + p_2 A_2 \sin \phi_2) \end{aligned}$$

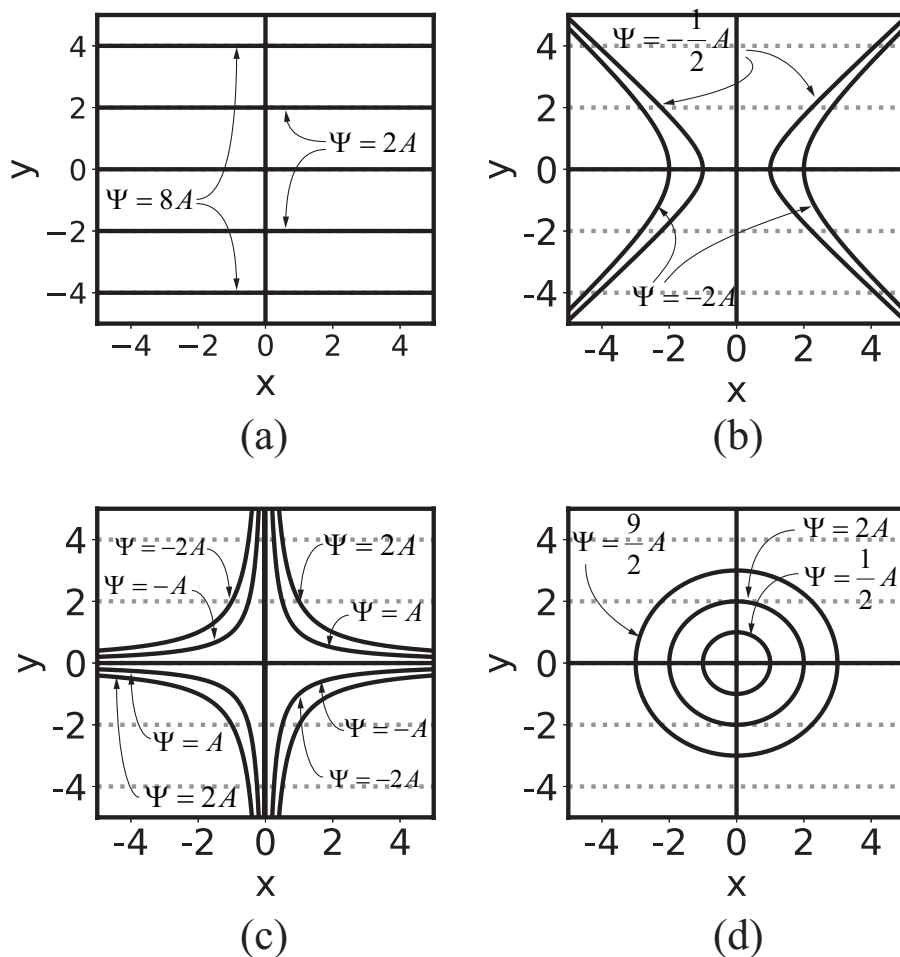
となる. ここから f_x , f_y を求める.

3. (a) 流速分布を 2 次関数として, $u = Ay^2 + By + C$ と置く. 境界条件より $u = -u_{max}/h^2(4y^2 - h^2)$ が得られる. (b) 連続の式より $\int_{-h/2}^{h/2} \rho v b dy = \int_{-h/2}^{h/2} \rho u b dy$. (a) を代入して計算すると $v = 2/3 u_{max}$. (c) 運動量保存則より

$$\int_{-h/2}^{h/2} \rho u^2 b dy - \int_{-h/2}^{h/2} \rho v^2 b dy = -f + (p_1 b h - p_2 b h)$$

を得る. (b) で得られた u_{max} を代入して $f = -\frac{1}{5} \rho b h v^2 + b h (p_1 - p_2)$ となる.

4. (a) $u = A, v = B$, (b) $u = Ay, v = Ax$, (c) $u = 2Ax, v = 2Ay$, (d) $u = A(-x^2 + y^2)/(x^2 + y^2)^2, v = -2Axy/(x^2 + y^2)^2$
5. 下図に流線を示す.



問5

6. 連続の式を満たすことは省略. 渦度は $\omega = \mathbf{k}(\partial v/\partial x - \partial u/\partial y) = \mathbf{0}$ であり, 渦無し.
7. (a) $u = Kx, v = -Ky$, (b) $\Psi = Kxy$, (c) 下図参照, (d) 渦度 $\omega = \mathbf{0}$ より渦無し.

第6章

1. この流れの流れ関数は

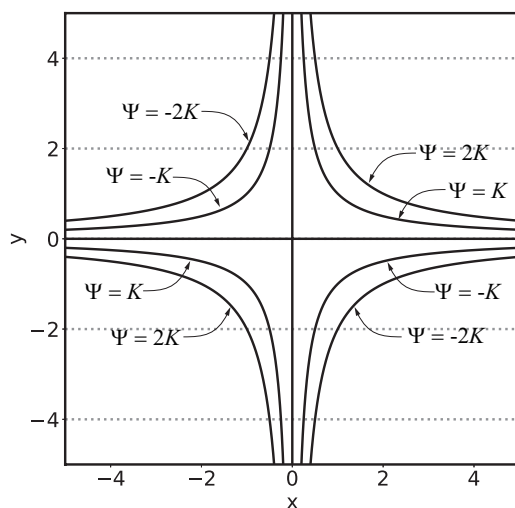
$$\Psi(r, \theta) = 2 \sin \left(r - \frac{1}{r} \right)$$

である. 下図のようになる. 尚, 図は python によって描かれている.

2. $v_r = -\frac{4}{\pi}, v_\theta = 2$. 流れ関数は

$$\Psi(r, \theta) = -2 \log r - \frac{4}{\pi} \theta$$

である. すぐに流線を描くのは難しいので, 渦による流線および吸込みによる流線を別々に描く. 吸込みの流れ関数を Ψ_1 とし, 渦による流れ関数を Ψ_2 とすれば下図に示す流線を得る. $\Psi_1 + \Psi_2$ が一定となる点を繋いでい



問 7

くと実線の流線を得る.

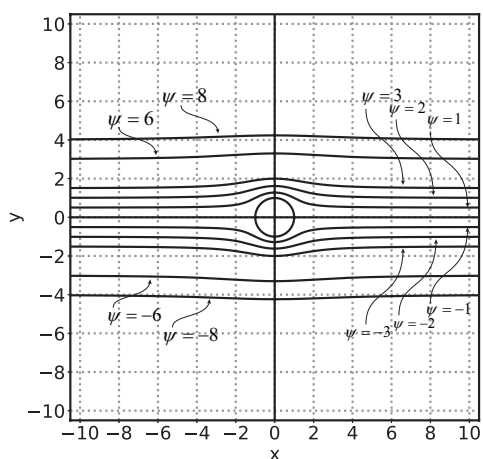


図 7.3: 問 1

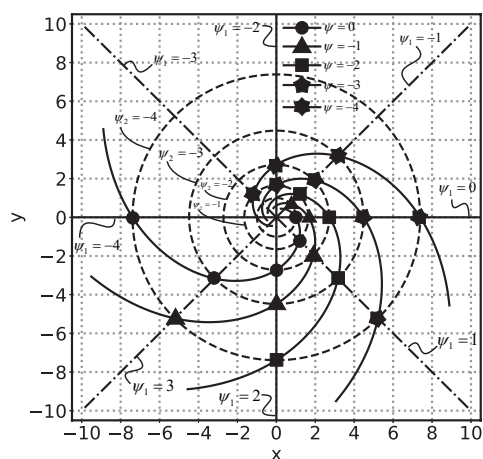


図 7.4: 問 2

3. 物体表面条件は $r = a$ で $\frac{\partial \Phi}{\partial r} = U \cos \theta$, 十分遠方 ($r \rightarrow \infty$) で $\Phi \rightarrow 0$ である. 速度ポテンシャルは Laplace の式を満足する必要がある. 円柱座標系の Laplace の式の一般解は

$$\Phi(r, \theta) = \sum_{n=1}^{\infty} \cos n\theta [A_n r^n + B_n r^{-n}] + A_0 + B_0 \log r$$

である. 境界条件より速度ポテンシャルは

$$\Phi(r, \theta) = -\frac{Ua^2}{r} \cos \theta$$

となる. 一般化された Bernoulli の定理から円柱に生じる力は $-\rho\pi a^2 \dot{U}$ となる.

参考文献

- [1] Walt Musial. Overview of floating offshore wind. National Renewable Energy Laboratory (NREL), 2020. <https://www.nrel.gov/news/video/overview-of-floating-offshore-wind-text.html>.
- [2] Yasunori Nihei, Kazuhiro Iijima, Motohiko Murai, and Tomoki Ikoma. A comparative study of motion performance of four different fowt designs in combined wind and wave loads. *33rd International Conference on Ocean, Offshore and Arctic Engineering*, No. OMAE2014-24643, pp. 1–10, 2014.
- [3] Irene Rummelhoff. World’ s first floating wind farm has started production. Technical report, equinor, 2017. <https://www.equinor.com/en/news/worlds-first-floating-wind-farm-started-production.html>.
- [4] EnergyShift 編集部. 戸田建設に聞く（２）実用化が進む洋上風力発電～戸田建設が挑む「浮体式」とは. Technical report, EnergyShift, 2019. <https://energy-shift.com/news/aa2dc32a-886c-4b85-bdd7-f3bb9b54e7de>.
- [5] 独立行政法人海事教育機構. 練習船. Technical report. <https://www.jmets.ac.jp/ship/index.html>.
- [6] 大内一之, 鶴沢潔. ウィンドチャレンジャー計画：化石燃料船から風力推進船へ. 日本船舶海洋工学会誌 KANRIN (咸臨), Vol. 63, pp. 55 – 60, 2015.
- [7] 二瓶泰範. 大阪府立大学初年次ゼミナール マリンレジャーとヨット講義資料. 2018.
- [8] 二瓶泰範, 北村眞一, 宮本一之, 外城正昭, 石井好治, 近本雅彦, 篠井隆之, 増田憲和. 船舶 特許第 6332824 号. 2017.
- [9] 二瓶泰範, 北村眞一, 外城正昭, 篠井隆之, 増田憲和. 船舶 特許第 6796292 号. 2020.
- [10] 二瓶泰範, 鶴見悠太郎, 増田憲和, 原田浩太郎, 奥野充一, 原尚之, 中田聡史. 四胴型自動航行船による高密度・高頻度な自動水質環境計測. 土木学会論文集 B1(水工学), Vol. 76, No. 2, pp. 1039–1044, 2020.
- [11] 関西造船協会. 造船設計便覧. 第 4 版. 海文堂, 1983.
- [12] 二瓶泰範. 2021 年 ロボセンアームに生じる波浪荷重試験. Technical report, Marine Hydrodynamics Laboratory, 大阪府立大学, 2021. <http://hydrodynamics.marine.osakafu-u.ac.jp/MEMORY/2021ROBOSENARM.html>.
- [13] 越塚誠一, 柴田和也, 室谷浩平. 粒子法入門. 第 4 刷. 丸善出版株式会社, 2016.
- [14] 今井功. 流体力学 (前編). 裳華房, 第 25 版, 1999.
- [15] J. N. Newman. *Marine Hydrodynamics*. The MIT Press, 1977.