

# 浮体運動解析特論

Ver. 4.2

二瓶 泰範

<http://hydrodynamics.marine.omu.ac.jp/>

2025 年 4 月

# 目次

|       |                          |    |
|-------|--------------------------|----|
| 第 1 章 | 浮体式構造物と浮体運動解析技術概説        | 1  |
| 1.1   | 洋上風力発電                   | 1  |
| 1.2   | 浮体運動解析手法概説               | 5  |
| 第 2 章 | 完全流体の力学                  | 7  |
| 2.1   | 流体運動の記述法と流体加速度の関係        | 7  |
| 2.2   | 境界条件                     | 8  |
| 2.3   | 流線                       | 9  |
| 2.4   | 流量と循環                    | 10 |
| 2.5   | 輸送定理                     | 11 |
| 2.6   | 連続の式                     | 12 |
| 2.7   | Euler の運動方程式             | 13 |
| 2.8   | 流体力学における運動量保存則           | 14 |
| 2.9   | Bernoulli の定理            | 15 |
| 2.10  | 速度ポテンシャルと流れ関数と複素速度ポテンシャル | 17 |
| 2.11  | Blasius の公式              | 19 |
| 第 3 章 | 完全流体の力学 (2 次元編)          | 20 |
| 3.1   | 流れの基本要素                  | 20 |
| 3.2   | 一様流中に置かれた円柱              | 25 |
| 3.3   | 一様流中に置かれた平板翼の揚力          | 28 |
| 第 4 章 | 波                        | 31 |
| 4.1   | 境界条件                     | 31 |
| 4.2   | 微小振幅波の速度ポテンシャル           | 32 |
| 第 5 章 | 波浪中の浮体運動解析               | 34 |
| 5.1   | 速度ポテンシャルと浮体運動の関係         | 34 |
| 5.2   | 浮体に生じる流体による力とモーメント       | 38 |
| 5.3   | 浮体の慣性                    | 42 |
| 5.4   | 係留の理論                    | 43 |
| 5.5   | 波浪中の浮体の運動方程式             | 45 |
| 第 6 章 | 境界要素法とは                  | 47 |
| 6.1   | 分布渦法                     | 47 |
| 6.2   | 浮体周りの速度ポテンシャルを求める為の境界要素法 | 50 |
| 第 7 章 | 浮体式風車の実海域試験における設置方法      | 53 |

|      |                                   |    |
|------|-----------------------------------|----|
| 7.1  | 緒言 . . . . .                      | 53 |
| 7.2  | 実海域試験サイトと浮体配置 . . . . .           | 53 |
| 7.3  | 海面の長期占有による関連機関への申請 . . . . .      | 55 |
| 7.4  | 本研究における浮体式風車概要 . . . . .          | 55 |
| 7.5  | 施工 (インストール)・実験時の様子・撤去まで . . . . . | 55 |
| 参考文献 |                                   | 61 |

## 第 1 章

# 浮体式構造物と浮体運動解析技術概説

洋上における石油開発は石油掘削リグに代表される海洋構造物を用いることにより大水深からの開発を可能にしてきた。近年では石油掘削に加え、洋上における天然ガス開発も海洋構造物が使われる時代に入っている。また、再生可能エネルギーの一つである風力についても豊富かつ安定な風資源が海上に多く賦存することを背景に着床式の風力発電に加えて浮体式洋上風力発電が研究開発されるようになっている。そして、その一部は商用利用されようとしている。この他にもメガフロートや波力発電、潮流発電等でも浮体技術は使われる。

こういった開発において係留浮体の波の中での挙動や風や流れの中での挙動を解析することは欠くことは出来ず、多くの技術開発や研究が為されてきた。本章では近年浮体構造物が利用される代表例として浮体式洋上風力について触れるとともに、浮体解析技術の手法について纏めてみたい。

## 1.1 洋上風力発電

2015 年 12 月の第 21 回気候変動枠組条約締約国会議 (COP21) でパリ協定が採択された。世界的な平均気温上昇を産業革命以前に比べ  $2^{\circ}\text{C}$  より十分低く保つとともに、 $1.5^{\circ}\text{C}$  に抑えるよう努力を続けることを目標に掲げた。また、各国は温室効果ガス (greenhouse gas:GHG) の人為的な発生源による排出と吸収源による除去量を均衡させるよう取り組むことが求められている。いわゆるカーボンニュートラルを意味している。日本ではパリ協定合意に先立つ 2015 年 7 月に 2030 年度に GHG 排出量を 2013 年度に比べ 26% 削減する目標を掲げた「日本の約束草案」を地球温暖化対策本部で決定している。長期戦略では 2050 年までに 80% の GHG 排出削減を掲げている。図 1.1 に、2020 年に明らかにされた 1 次エネルギーの国内供給の推移を示す [1]。

【第211-3-1】一次エネルギー国内供給の推移  
(EJ)

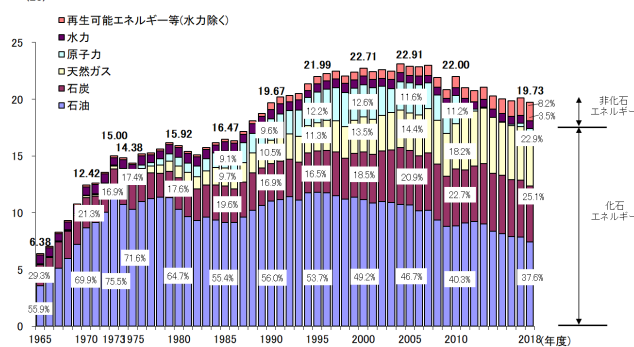


図 1.1: 一次エネルギー国内供給の推移 [1]

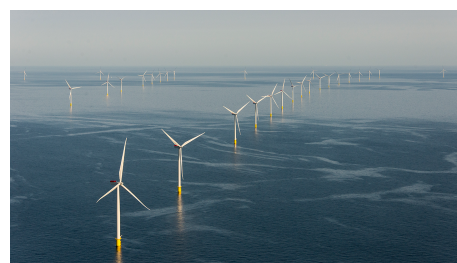


図 1.2: デンマーク最大の Anholt 洋上風力発電所 [2]

以上の理由から洋上での再生可能エネルギーの研究開発が世界的に活況を呈している。洋上での再生可能エネルギー



は風力・波力・潮流力が挙げられる．ここでは特に洋上での風力発電について述べる．風力発電は陸上での実績も多数あり，さらには洋上の風は比較的安定しており平均風速も高いことから洋上の風力発電の実用化が期待されている．洋上風力には大きく2つの設置工法がある．1つが着床式であり，もう1つが浮体式である．水深30m～50mくらいまでは着床式を用いることが可能である．着床式は欧州で既にかなり多く導入されてきている．図1.2に洋上風力発電の1例としてデンマーク最大の Anholt 洋上風力発電所を示す [2]．日本でも今後さらに進展が進む分野と言えよう．また，欧州では風車の大型化や設置までの効率化も進んできている．例として図1.3にデンマーク・エスピアウ港を示す [3]．そして欧州では10円/kWhを下回る価格で売電される事例も報告されている．

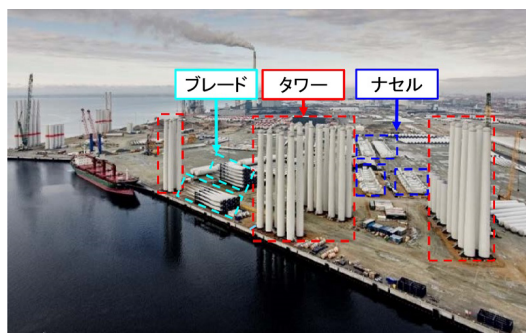


図 1.3: 欧州での組み立ての効率化様子 [3]



図 1.4: 洋上風車の基礎 [4]

最後に着床式の洋上風力発電の基礎部分に着目する．図1.4に基礎部分のイメージ図を示す [4]．水深の深さに応じて基礎部分を使い分けるのが一般的である．Monopile 式といってタワーを海底に差し込むもの，Tripod 式といって組んだ架台を海底に打ち込む方法，Jacket 式といって鋼管をトラス式に組むものとの大きく3つに分けられる．この他にも重力式といってコンクリートを円錐状にしたものもある．水深が50mを超えてくると着床式から浮体式が



図 1.5: 浮体式風車の浮体形式 [5]

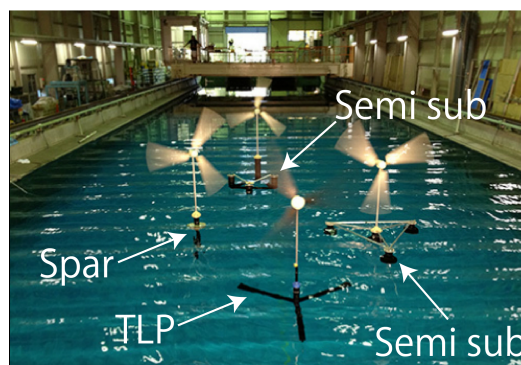


図 1.6: Nihei et al. による水槽試験 [6]

必要となってくる．浮体式になると風車タワーから下は浮体と，係留チェーンや係留ワイヤーや係留ロープ等と，アンカーとなる．図1.5及び図1.6に浮体式風車用の浮体形式を示す．(a) スパー型 (Spar:筒)，(b) セミサブ型 (Semi submersible:半潜式)，(c) TLP 型 (Tension Leg Platform)，(d) バージ型 (barge:箱船) に大きく分類される．一般的にスパー型は構造が単純なため製造コストを他の浮体より低く抑えることが可能である．一方で，タワー高さと同程度程度の喫水が必要となり使える水深が限られる．スパー型はコストが低いということもあり使用海域さえあれば商業利用が一番最初に始まる．Scotland の北東部沖合 25km の沿岸に 5 基の 6MW のスパー式風車が 2017 年から商業運転している (図 1.7 [7])．また日本でも九州五島沖で商用運転の計画が進行中である [8]．図 1.8 は五島沖の浮体式風車である．現在は 1 機浮いているが，今後数機での商用運転が始まる．

次に浮体の係留方法について述べてみたい．係留は係留の素材としてチェーンを使うか，合成繊維ロープを使うか，ワイヤーを使うというのが現在の海洋構造物の主流である．係留方式はカテナリー係留という方式が一番多く利用され，緩く浮体をつなぎ留めることで波からの力や風による力を逃すようにする．また，多数の係留チェーンを使って



図 1.7: Scotland 沖の Hywind Scotland



図 1.8: 五島沖の浮体式風車

浮体を多方向から海底とつなぎ留め浮体の振れ回り（回転）を許さないものと、一点係留という敢えて振れ回りを許し波や風といった外力から逃す方法とがある。一点係留方式は技術的に難しい面もあるが、下で述べる通り水深が 50m~100m といった多くの海域で使える浮体式風車が研究開発されている。

二瓶等は世界で初めて一点係留式浮体式風車の実海域試験を行った (2015 年 [9])。設置海域は石川県の七尾湾である。小型の浮体式風車ではあったが、本浮体式風車は約 1ton の質量、発電から陸上への送電ケーブルがあり、風車ブレードのピッチ制御（翼の迎角の制御）も可能な仕様となっている。また、係留設計、浮体設計、風車設計、施工設置、運用・保守、撤去まで全てを実施している。「一点係留式」という新しい技術ということもあり、係留設計は特に工夫を凝らしている [10]。この工夫について力学的考察を加えたもの [11] について抜粋および日本語訳したものをここで簡単に紹介する。

図 1.9 に一点係留方式浮体式風車の簡易図を示す。本浮体式風車は、風車ブレード、風車ブレード迎角コントロール機構、発電機、送電ケーブル、制御ケーブル、浮体、浮体と係留とをつなぐ回転機構部、係留チェーンで構成される。浮体は図 1.9 における Rotational Axis まわりに回転するのがこの浮体式風車の特徴である。電気ケーブルと制御ケーブルは浮体と絡まないようにするために回転機構部の中を通す必要がある。

同図において回転機構部上部にあるベアリングの摩擦モーメントを  $M_f$ 、係留チェーンによる復原モーメントを  $M_r$  とすると  $M_r > M_f$  である必要がある。回転機構上部のベアリングがこの条件を満たさないと係留チェーンは回転機構と一緒に捻じれていく。図 1.10 に実際の計測により得られた回転機構部の摩擦モーメント（緑部）と係留チェーンによる復原モーメント（赤線）の関係を示す。横軸が浮体の回転角度であり、縦軸がモーメントである。この関係より浮体が約  $40^\circ$  回転するとき係留チェーンによる復原モーメントの方が大きくなりチェーンは振れずに浮体は回ることが出来る。

図 1.11 に石川県七尾湾において実施した実海域試験の断面図を、図 1.12 にその時の写真を示す。図 1.13 はその試験の時の結果の一部であり、横軸が時間、縦軸が風速、風向、浮体向きを示している。風向（青点）が変化すると浮体向き（緑点）が風向に追従することが出来ることが明らかになった。

最後に課題と今後に向けて述べる。現在取り組まれている浮体式風車のプロジェクトは 50m~100m といった多くの海域でも使用できる浮体式風車となる。そうなると浮体形式としてはバージ型またはセミサブ型が候補として挙げられる。また浮体式風車の一番のネックはそのコストである。コストをいかに下げていくかも重要な課題である。現在取り組まれているプロジェクトはその課題を解決しようとして取り組まれている。そのいくつかを紹介する。

一つ目のプロジェクトがバージ型浮体を用いたものである。現在、フランスや日本で取り組まれている [12]。洋上であるため風車ブレードの回転数を上げて良いという発想から 2 枚翼を用いている。これにより風車の軽量化に繋がっている。また浮体のコスト軽減を狙ってコンクリート浮体も当初検討された。図 1.14 に示すように現在北九州沖において実証試験が行われている。

また、風車が巨大化し、これに伴い風車タワーの上部に設置する発電機も巨大化している。故にタワーにも負担が生じている現状にある。そこで導入が検討されているのが、ガイワイヤー等によってタワーをサポートするというアイディアである。ガイワイヤーと風車ブレードとは干渉してしまうので、風車が風向に追従するために必要なヨーイング装置を廃し、一点係留を用いて浮体ごと風に追従する仕組みである。一点係留方式は既に前節で述べたとおりである。

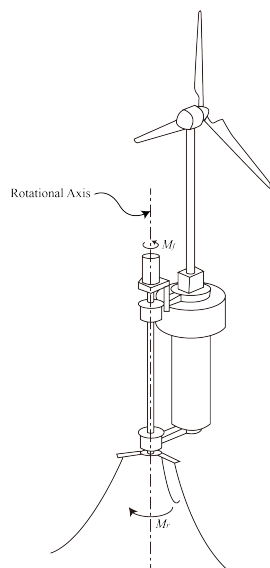


図 1.9: Physics model of the mooring system

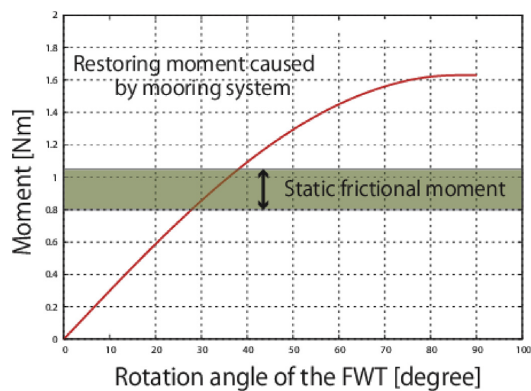
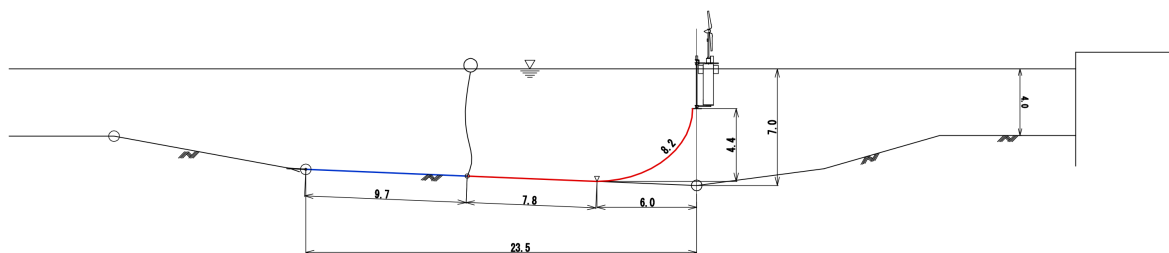


図 1.10: Relation between each moment



C 断面図

図 1.11: 実海域試験の断面図



図 1.12: Photo of the FWT model in the real sea test

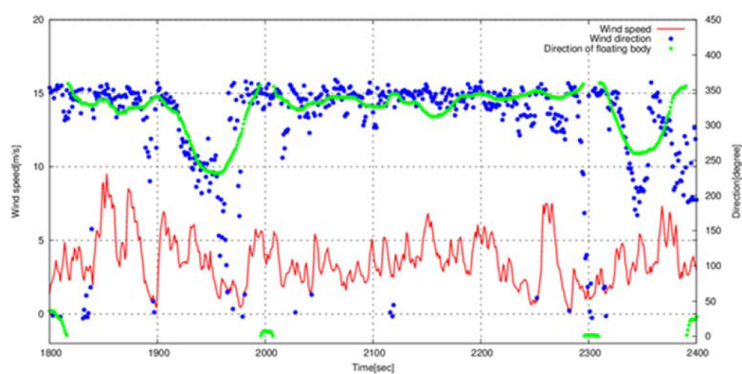


図 1.13: Weather vane test result in over 3m/s wind velocity



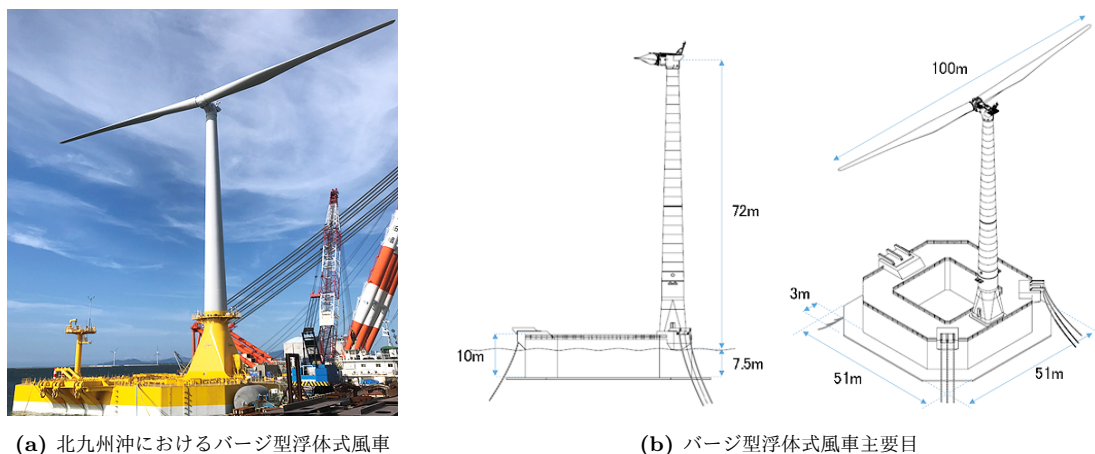


図 1.14: NEDO 北九州沖における浮体式風車プロジェクト [12]

Suzuki, Nihei et al. は図 1.15 に示す一点係留式浮体式風車の 1/60 模型試験を実施している。波浪中の構造応答 [13] や潮流・波浪・風の複数の環境条件下での振れ回り挙動について明らかにしている。図 1.16 はその試験模型である。時々刻々と変化する風荷重を模擬するためにこの水槽試験ではファンをリアルタイムに制御し、風荷重を模擬するという Real Time Hybrid Model 試験という新しい試験方法が導入されている。一点係留式浮体式風車は日本だけでなくフランスでも EOLINK によって研究開発が進んでいる [14]。基本的な考え方は同じであるが、この EOLINK は、タワーそのものがない。このように、国土に近く比較的送電し易い海域を利用する浮体式風車の研究開発が続いている現状にある。



図 1.15: NEDO による一点係留式浮体式風車

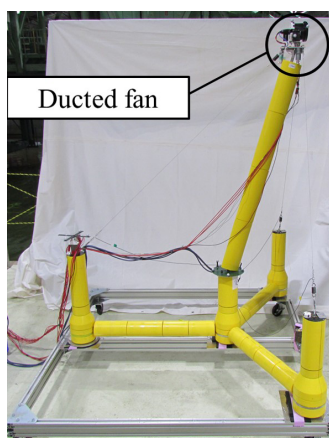


図 1.16: Real Time Hybrid Model 試験機

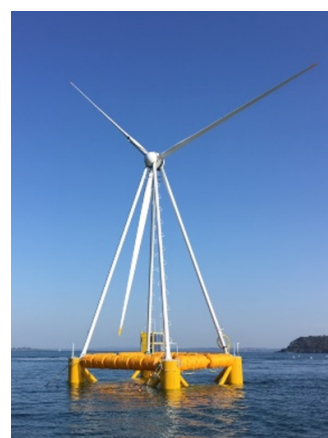


図 1.17: France Brest 沖の EOLINK

## 1.2 浮体運動解析手法概説

石油天然ガス開発用の掘削リグ、浮体式風車、波力発電、メガフロート等々といった海洋構造物の運動解析は浮体、係留、流体の相互干渉を考えることによって行われる。当然ながら運動方程式を解くことによってこの解析は行われるわけであるが、浮体が運動するとその反力として流体力を受ける。浮体運動と流体力学的干渉をどのように考えたら良いのだろうか。

まずその1つとして、付加質量・付加慣性モーメントという概念がある。浮体が加速運動することによって水から受ける力及びモーメントである。流体が加速度運動する浮体に付随して運動し、あたかも質量が増加したかのようになる

ためこのように呼ばれる．次に，造波減衰力・減衰モーメントというものがある．浮体がある速度で運動すると結果として波を造り浮体から放射状に波が進む様子が確認される．その反力を浮体は受け，浮体動揺は減衰することが直感的にも理解出来る．この力及びモーメントを造波減衰力及び造波減衰モーメントと言う．また，浮体の変位する際，元の変位や角度に復原する力やモーメントが生じる．そして，浮体が波から受ける力やモーメントがあり，これを波強制力及び波強制モーメントと言う．

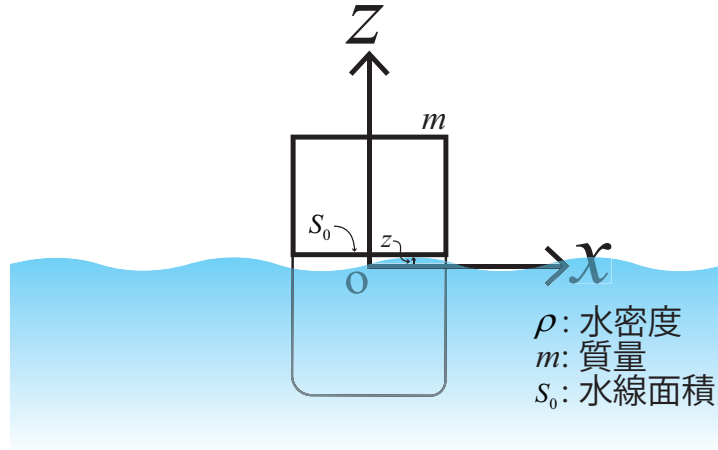


図 1.18: 規則波中の浮体運動

今、例として規則波中に浮体が heave 運動のみの 1 自由度運動するという仮定で整理してみよう．波強制力が heave 方向のみの力になることはあり得ず，あくまで理解を促す為の仮定であることに注意を要する．図 1.18 に座標系を示す．静水面上に座標原点  $z = 0$  を置く．座標原点で浮体の質量と浮力は釣り合いの位置であるとする．波強制力によって浮体が heave 運動している．その変位を  $z$  とし，速度は  $\dot{z}$ ，加速度は  $\ddot{z}$  である．浮体の加速運動によって生じる付加質量を  $m'$  とし，付加質量力は  $-m'\ddot{z}$  で表される．造波減衰力は速度  $\dot{z}$  に比例することが知られており，造波減衰係数を  $c$  とし， $-c\dot{z}$  の形で表される．浮体変位による復原力は，座標を上向き正としている為に少し分かりにくい， $-\rho g S_0 z$  が復原力となる．浮体が上方に変位したら水から受ける復原力は減少し，下方に変位したら復原力は増加することからも直感と合っている．波強制力は浮体が固定されているという条件で考える．固定されたとして考えるのは上で示したように浮体が波等によって運動する際の流体反力は既に加味したからである．

以上より，浮体の質量を  $m$  とし，運動方程式は

$$m\ddot{z}(t) = f_d(t) - m'\ddot{z}(t) - c\dot{z}(t) - \rho g S_0 z \quad (1.1)$$

と表される．ここで， $f_d$  は波強制力項である．

(1.1) において， $c$  や  $m'$  や  $f_d$  は物体の形状，境界条件，運動の周期によって大きく変化するが，一般的な一自由度振動系と同じ問題に帰着する．これらの各流体力係数を求める際には流体問題を解かなくてはならない．そして，この流体問題を解く際の手法としてポテンシャル理論が有用となる．海洋構造物は用途に応じて形状が様々であることは言うまでもない．ポテンシャル理論における任意形状の物体表面条件を解く手法として特異点分布法や境界要素法がある．

以降，本誌では第 2 章において完全流体の力学について述べる．既に述べたように，物体の形状，境界条件等によって流体力は変化するが，この流体力を求める際に，ポテンシャル理論が使われることが多く基礎的事項を捉えておく必要があるからである．第 4 章では微小振幅波の理論を扱う．微小振幅の規則波の考えを述べるに留まるが，ここから発展させることで高次の波（弱非線形波）や不規則波への応用も可能である．第 5 章では既に (1.1) で説明した内容の精緻な議論を行う．速度ポテンシャルの成分分解や，境界条件等の導出により解くべき速度ポテンシャルの境界値問題に触れる．また，一般的に行われている 6 自由度の浮体の運動方程式について明示する．

式の導出過程が分かれば浮体の波浪中の動揺について自身で考えてプログラムを用いて計算することが可能となるであろう．

## 第 2 章

# 完全流体の力学

### 2.1 流体運動の記述法と流体加速度の関係

流体運動の記述は 2 つの方法がある。一つは流体粒子の一つ一つを追跡する方法である。この手法を Lagrange 的方法という。もう一つは Euler 的方法である。この方法は流体粒子の一つ一つを追跡するのではなく、空間の各点、各瞬間の流体の状態量（流速  $\mathbf{u}$ 、圧力  $p$ 、密度  $\rho$ ）を固定座標系の位置と時間  $(x, y, z, t)$  の関数として表すものである。

流体粒子一つ一つを追跡する手法である Lagrange の手法は、観測においては粉体等のトレーサー粒子を流体内に入れて流体粒子一つ一つを捕捉する類の手法である。流れの中では注目した流体は観測点より遠方に流れていく場合もある。よって、決まった流体粒子を追跡する方法は観測が難しい場合が多い。流れの計算も無数の流体粒子がある為に難しい場合が多い。数値計算手法が進んだ昨今、Lagrange の手法をベースにした数値計算法の一つである粒子法と呼ばれる手法が登場し様々な適用事例が増えてきている [15]。

流体力学の問題の多くはもう一方の手法である Euler 的立場に立って多くの事例が考えられてきた。これ以降、本書はこの Euler の手法に則る。

流体力学の目標は流れ場を明らかにすることにあると言える。即ち、各点における流体の流速  $\mathbf{u}(x, y, z, t)$  及び圧力  $p(x, y, z, t)$ 、流体密度  $\rho(x, y, z, t)$  といった最低 5 つの未知数を支配方程式に基づき解くことに他ならない。これ以外にも例えば内燃機関内の流体問題を解くような場合は温度を求めるような場合もある。本書は海洋工学を学ぶ方向けの書であるので流体として考える水や海水の水温は一定と見なせる程その変化は小さいものとする。

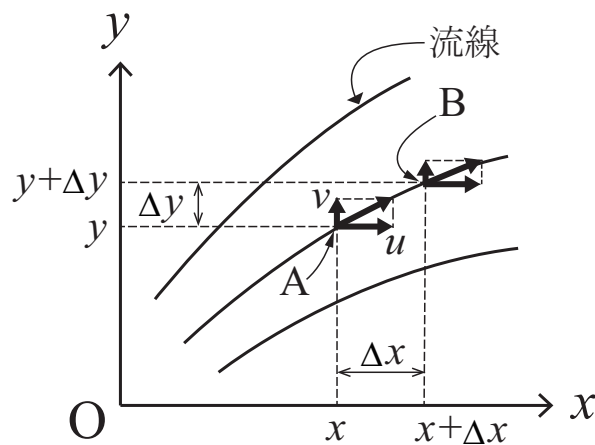


図 2.1:  $t = t$  における流線

図 2.1 に示されるように、Euler 的立場に立ち A 点を通過しようとする流体粒子が持つ加速度について考えてみる。二次元平面での流れ場で考えてみる。Euler 的視点に立っているため、流速は  $\mathbf{u}(x, y, t) = (u(x, y, t), v(x, y, t))$  として表される。この時に注意すべきは流体粒子には着目しておらず、固定点である A 点を通過する流体粒子を眺めるとい

う事である。もし、一つの流体粒子に着目するならば加速度は

$$\frac{d\mathbf{u}}{dt} \quad (2.1)$$

となることに異論はない。Euler 的立場でも A 点において流速が  $t = t$  から  $t = t + \Delta t$  において変化している場合、その速度の時間変化は

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{u(x, y, t + \Delta t) - u(x, y, t)}{\Delta t} = \frac{\partial u}{\partial t} \quad (2.2)$$

で与えられる。

次に、図 2.1 に示されるように、 $t = t$  における流線について見てみよう。B 点にある粒子は  $t - \Delta t$  に同一流線上の A 点にあったとする。また、 $t = t$  における B 点での  $x$  方向流速は  $u(x + \Delta x, y + \Delta y, t)$  である。A 点を通過する流体粒子の加速度は単位時間当たりの速度の変化と定義される訳であるから A 点という固定点から見た時、加速度は

$$\frac{u(x + \Delta x, y + \Delta y, t) - u(x, y, t)}{\Delta t} \quad (2.3)$$

と表される。B 点での流速は

$$u(x + \Delta x, y + \Delta y, t) \approx u(x, y, t) + \frac{\Delta u}{\Delta x} \Delta x + \frac{\Delta u}{\Delta y} \Delta y \quad (2.4)$$

であるから (2.3) は

$$\frac{u(x + \Delta x, y + \Delta y, t) - u(x, y, t)}{\Delta t} \approx \frac{\Delta u}{\Delta x} \frac{\Delta x}{\Delta t} + \frac{\Delta u}{\Delta y} \frac{\Delta y}{\Delta t} \quad (2.5)$$

となる。また、 $u = \Delta x / \Delta t$ 、 $v = \Delta y / \Delta t$  なので、最終的に加速度として

$$\lim_{\Delta x, \Delta y \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} \frac{\Delta x}{\Delta t} + \frac{\Delta u}{\Delta y} \frac{\Delta y}{\Delta t} = u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \quad (2.6)$$

が得られる。(2.2) と (2.6) とを合わせて、A 点を通過する流体粒子の加速度は

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \quad (2.7)$$

となる。このような固定点から流体の流れを観察した際の時間微分を実質微分や Lagrange 微分と呼ぶ。(2.7) は  $x$  方向の加速度であり、また二次元で考えたものである。三次元でも全く同じ事が言える。以上より  $x$ 、 $y$ 、 $z$  方向の加速度は

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} \end{cases} \quad (2.8)$$

となる。

## 2.2 境界条件

流速や圧力は流体の支配方程式とともに境界条件や初期条件により決定される。微分方程式の解には任意関数が含まれており、任意関数を確定する為には何らかの境界条件・初期条件を考慮して決定するのと同様の考えである。ここでは、以下の 2 つの境界条件のパターンについて考えてみたい。一つ目は (1) 物体表面での境界条件であり、もう一つは (2) 変形する境界面での境界条件である。

### (1) 物体表面での境界条件

物体は変形しないものとする。図 2.2 に示すように物体表面の任意の 1 点での法線ベクトルを  $\mathbf{n}(\mathbf{x})$ 、流体流速を  $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$  とする。そして物体は移動しており、移動速度を  $\mathbf{u}'(\mathbf{x}, t)$  とする。物体表面において相対流速  $\mathbf{u} - \mathbf{u}'$  の法線方



図 2.2: 物体表面における境界条件

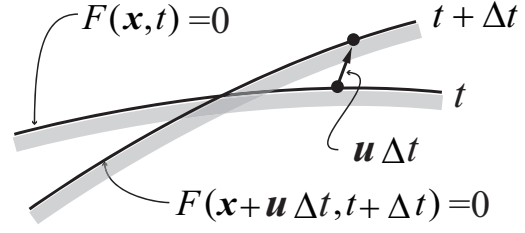


図 2.3: 境界が変形する場合の境界条件

向流速は 0 とならなくてはならない。何故なら物体表面から流体が流れ出てくることはないし、物体が変形でもしない限り物体に流体が吸い込まれることがないからである。即ち、

$$\{\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) - \mathbf{u}'(\mathbf{x}, t)\} \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}) = 0 \quad (2.9)$$

が成り立つ。物体が固定されている場合は  $\mathbf{u}' = 0$  であるので

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}) = 0 \quad (2.10)$$

が成り立つ。

## (2) 変形する境界面での境界条件

水面が変形する境界の代表例と言えよう。図 2.3 に示す様に時刻  $t$  における境界面の形状が

$$F(\mathbf{x}, t) = 0 \quad (2.11)$$

で与えられるとする。境界面を構成する流体粒子は  $\Delta t$  時間後も境界面を構成する流体粒子であり続けるので、 $\Delta t$  時間進んだ場合も次式が成り立つ。

$$F(\mathbf{x} + \mathbf{u}\Delta t, t + \Delta t) = 0 \quad (2.12)$$

今、この境界面を表す関数  $F$  の時間変化を考えると、2.1 節と同様の議論から Lagrange 微分となり、また関数  $F$  は常に 0 である為、次式が成り立つ。

$$\frac{DF}{Dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{F(\mathbf{x} + \mathbf{u}\Delta t, t + \Delta t) - F(\mathbf{x}, t)}{\Delta t} = \frac{\partial F}{\partial t} + u \frac{\partial F}{\partial x} + v \frac{\partial F}{\partial y} + w \frac{\partial F}{\partial z} = 0 \quad (2.13)$$

この (2.11) と (2.13) が変形する境界面での境界条件となる。

## 2.3 流線

流体の流れの様子を表すものが流線である。図 2.4 に流線の様子を示す。A から  $\Delta t$  時間に  $\Delta \mathbf{r} = (\Delta x, \Delta y, \Delta z)$  移動しているので、

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{u}(x, y, z, t) \quad (2.14)$$

が成り立つと言える。即ち  $x, y, z$  方向成分に分けて考えると以下が成り立つ。

$$\frac{dx}{u(x, y, z, t)} = \frac{dy}{v(x, y, z, t)} = \frac{dz}{w(x, y, z, t)} = dt \quad (2.15)$$

これを流線の微分方程式という。

流体力学においては流線以外にも流れの道すじや色付き流線といった概念もある。詳細については文献 [16] に詳しいので参考にされたい。



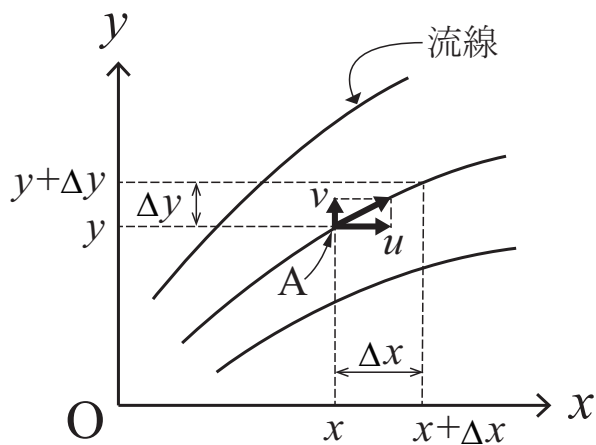
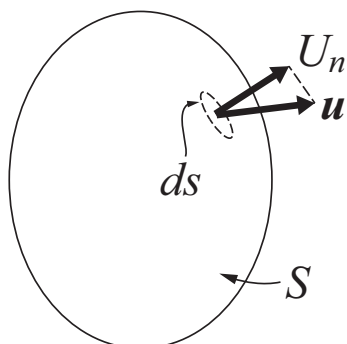
図 2.4:  $t = t$  における流線

図 2.5: 流量

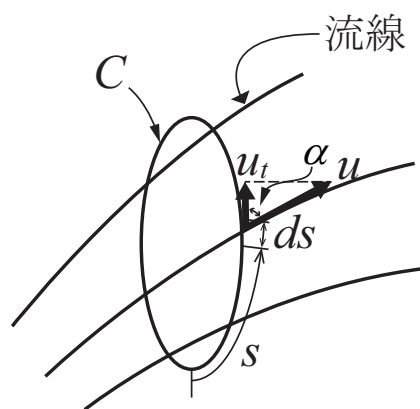


図 2.6: 周積分と循環

## 2.4 流量と循環

単位時間あたりに任意の断面を通過する流体体積を流量という．単位は  $\text{m}^3/\text{s}$  である．流量を  $Q$  として，

$$Q = \int_S U_n ds \quad (2.16)$$

で表される．図 2.5 に示されるように， $U_n$  は法線方向流速である．また，法線ベクトルを  $\mathbf{n}$  として， $U_n = \mathbf{u} \cdot \mathbf{n}$  であるから

$$Q = \int_S \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} ds \quad (2.17)$$

とも表される．

循環  $\Gamma$  とは流体の渦運動の強さを代表する量である．図 2.6 に示す様に，流れの中に一つの閉曲線  $C$  をとり， $C$  上の一点  $A$  から  $C$  に沿って長さ  $s$  を測る． $C$  上の微小線要素  $ds$  として，その接線方向流速を  $u_t$  とする．閉曲線  $C$  に沿っての一周積分  $\Gamma(C)$

$$\Gamma(C) = \oint_C u_t ds \quad (2.18)$$

を閉曲線  $C$  に沿う循環という．さて，図 2.6 に示す様に，流れに対しての接線流速を  $u$  とする． $u_t = u \cos \alpha$  であるから，

$$\Gamma(C) = \oint_C u \cos \alpha ds = \oint_C \mathbf{u} \cdot d\mathbf{s} \quad (2.19)$$

が得られる。ここで、 $\mathbf{u} = (u, v, w)$ 、 $d\mathbf{s} = (dx, dy, dz)$  である。

## 2.5 輸送定理

流体力学における基礎方程式である連続の式や運動方程式である Euler の運動方程式や Navier-Stokes 方程式を導く際に輸送定理が使われるのでここで導出しておく。J. N. Newman の Marine Hydrodynamics にも詳しく説明されている [17]。さて、任意の関数  $f(\mathbf{x}, t)$  を考える。そして次の体積積分を考える。

$$I(t) = \iiint_{V(t)} f(\mathbf{x}, t) dV \quad (2.20)$$

ここで  $t$  は任意の時間を示しており、 $V(t)$  は時間とともに変化する任意の流体塊である。 $\mathbf{x}$  はこの流体内の位置座標である。この流体塊の境界  $S(t)$  も時間とともに変化する。そして、その法線方向の流速は  $U_n(\mathbf{x}, t)$  であるとする。

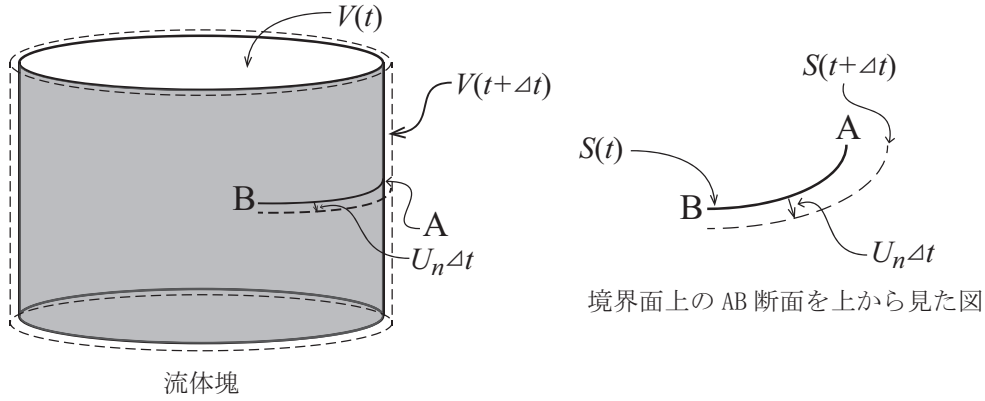


図 2.7: 輸送定理における流体塊の概念図

この体積積分  $I(t)$  の時間増分  $\Delta I$  を考えてみることにする。

$$\Delta I = I(t + \Delta t) - I(t) = \iiint_{V(t+\Delta t)} f(\mathbf{x}, t + \Delta t) dV - \iiint_{V(t)} f(\mathbf{x}, t) dV \quad (2.21)$$

となる。関数  $f$  の時間に関する 1 次までの Taylor 展開は

$$f(\mathbf{x}, t + \Delta t) = f(\mathbf{x}, t) + \Delta t \frac{\partial f(\mathbf{x}, t)}{\partial t} \quad (2.22)$$

となる。これを (2.21) に代入する。また、 $V(t + \Delta t) = V + \Delta V$  なので

$$\begin{aligned} \Delta I &= \iiint_{V+\Delta V} \left( f + \Delta t \frac{\partial f}{\partial t} \right) dV - \iiint_V f dV \\ &= \iiint_V \Delta t \frac{\partial f}{\partial t} dV + \iiint_{\Delta V} f dV + \iiint_{\Delta V} \Delta t \frac{\partial f}{\partial t} dV \end{aligned} \quad (2.23)$$

が得られる。次に (2.23) の右辺第 2 項、3 項について考えよう。図 2.7 より、 $\Delta t$  時間で増えた部分の微小体積  $\Delta V$  は流体体積  $V$  を取り囲む境界  $S$  から  $\Delta t$  時間で流出する流体塊であると理解できるので、境界面における法線方向流速  $U_n(\mathbf{x}, t)$  を用いて

$$\iiint_{\Delta V} f dV + \iiint_{\Delta V} \Delta t \frac{\partial f}{\partial t} dV = \iint_S f(U_n \Delta t dS) + \iint_S \Delta t \frac{\partial f}{\partial t} (U_n \Delta t dS) \quad (2.24)$$

となる．上式の右辺2項目は  $O[\Delta t^2]$  と2次の微小項になるので無視できるものとする．ここから  $I(t)$  の時間微分は

$$\frac{dI}{dt} = \iiint_V \frac{\partial f}{\partial t} dV + \iint_S f U_n dS \quad (2.25)$$

となる．上式2項をもう少し変形していく．境界面における法線方向流速  $U_n(\mathbf{x}, t)$  は  $x, y, z$  方向の流速成分  $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = (u(\mathbf{x}, t), v(\mathbf{x}, t), w(\mathbf{x}, t))$  と法線の各成分  $\mathbf{n}(\mathbf{x}, t) = (n_x(\mathbf{x}, t), n_y(\mathbf{x}, t), n_z(\mathbf{x}, t))$  とを用いて

$$U_n = \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = u n_x + v n_y + w n_z \quad (2.26)$$

であるから (2.25) の右辺第2項は

$$\iint_S f U_n dS = \iint_S f \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} dS = \iiint_V \nabla \cdot (f \mathbf{u}) dV \quad (2.27)$$

が得られる．第2式と第3式の移行は Gauss の発散定理を用いている．

以上より最終的に

$$\frac{d}{dt} \iiint_{V(t)} f(t) dV = \iiint_V \left\{ \frac{\partial f}{\partial t} + \nabla \cdot (f \mathbf{u}) \right\} dV \quad (2.28)$$

という関係が得られる．この関係のことを輸送定理と呼んでいる．

## 2.6 連続の式

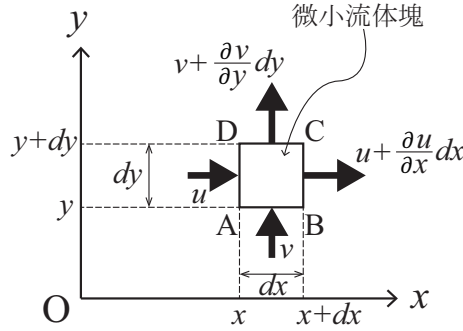


図 2.8: 微小流体塊に流入する流体

流体力学の基本式の一つ目が連続の式と呼ばれるものである．質量保存則とも呼ばれる．2.5 節の輸送定理からも導かれるが，下記の方法でこの連続の式を導出してみようと思う．図 2.8 に示すような微小流体塊を考える．流体の密度を  $\rho$  とする． $dt$  時間内にこの流体塊に流入する流体の質量は

$$\rho u dy dz dt + \rho v dx dz dt + \rho w dx dy dt \quad (2.29)$$

と表される．一方，流出する流体の質量は

$$\rho \left\{ \left( u + \frac{\partial u}{\partial x} dx \right) dy dz dt + \left( v + \frac{\partial v}{\partial y} dy \right) dx dz dt + \left( w + \frac{\partial w}{\partial z} dz \right) dx dy dt \right\} \quad (2.30)$$

である．流体塊の中の流体密度  $\rho$  が微小時間に変化するとすれば

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} dx dy dz dt \quad (2.31)$$

が  $dt$  時間に増える流体の質量である．密度変化分 + 流出量 - 流入 = 0 であるので

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) = 0 \quad (2.32)$$

が得られる。(2.32) は流体の密度が変わることを考慮する圧縮性流体の場合の連続の式という。一方、流体の密度変化を無視できる場合も多い。このような流体のことを非圧縮性流体と呼ぶが、非圧縮性流体の場合の連続の式は

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (2.33)$$

となる。

## 2.7 Euler の運動方程式

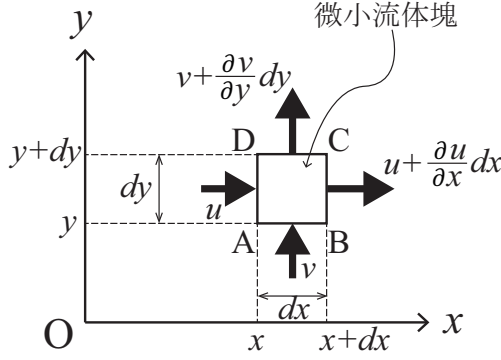


図 2.9: 微小流体塊

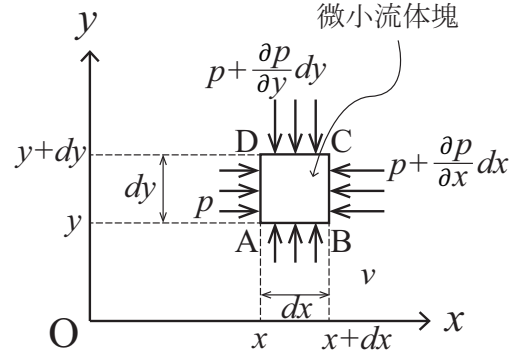


図 2.10: 微小流体塊に作用する圧力

流体力学における基礎方程式の2つ目が Euler の運動方程式である。これも 2.5 節の輸送定理からも導かれるが、下記の方法で導出してみたいと思う。前節と同様に図 2.9 に示す微小な流体塊を考える。この流体塊の質量は  $\rho dx dy dz$  であるから各方向軸の運動量の時間変化は

$$\begin{cases} \frac{d\rho u}{dt} dx dy dz \\ \frac{d\rho v}{dt} dx dy dz \\ \frac{d\rho w}{dt} dx dy dz \end{cases} \quad (2.34)$$

で与えられる。図 2.10 に示すように外力は圧力、 $z$  方向負方向に作用する重力と考えると運動方程式は

$$\begin{cases} \rho \frac{du}{dt} = -\frac{\partial p}{\partial x} \\ \rho \frac{dv}{dt} = -\frac{\partial p}{\partial y} \\ \rho \frac{dw}{dt} = -\frac{\partial p}{\partial z} - \rho g \end{cases} \quad (2.35)$$

となる。ここで左辺について考える。各方向への流速成分  $\mathbf{u} = (u, v, w)$  は時間と位置の関数であるから  $u(\mathbf{x}, t)$ ,  $v(\mathbf{x}, t), w(\mathbf{x}, t)$  である。よって、この時間微分は

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{dv}{dt} = \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial v}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{dw}{dt} = \frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial w}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} \end{cases} \quad (2.36)$$

となる。以上より、(2.35) は

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} \\ \frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} - g \end{cases} \quad (2.37)$$

となる。上式を Euler の運動方程式という。ベクトル表記で表すと

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \text{grad}) \mathbf{u} = -\frac{1}{\rho} \text{grad } p - g \mathbf{k} \quad (2.38)$$

となる。ただし  $\mathbf{k} = (0, 0, 1)$  である。(2.38) の左辺項を慣性項、右辺第一項を圧力項、第二項を外力項と言う。

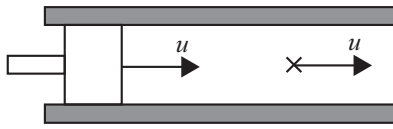


図 2.11: 非定常項

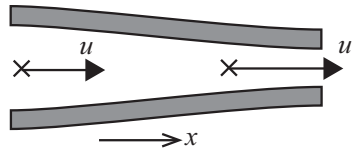


図 2.12: 対流項 1

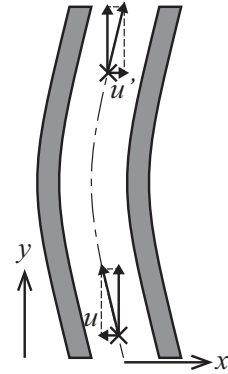


図 2.13: 対流項 2

慣性項についてさらに理解を進めよう。簡単のために (2.37) の  $x$  方向に関する Euler の運動方程式内に現れる慣性項について考える。図 2.11 に示すように一様な太さの筒内に流体が満たされているとする。満たされている流体が非圧縮性の流体であるとする、ピストンで流体を押す際には流体はピストンと一緒に速度で動くであろう。ピストンが  $\partial u / \partial t$  の加速度運動をするとすれば、流体も同じく加速度運動し、その大きさは  $\partial u / \partial t$  となる。次に慣性項の第二項について考える。図 2.12 に示すような縮流管内を流体が流れているとする。この流れが定常な流れであっても、流れは  $u$  から  $u'$  となり流体粒子は加速運動していることが分かる。そして、その加速度の大きさは流体粒子の速度、及び位置による速度の変化  $\partial u / \partial x$  に比例して大きい。よって、 $u (\partial u / \partial x)$  がその加速度の大きさとなる。次に、図 2.13 のような曲がり管を考えてみる。この図では  $x$  方向の流速は  $u$  から  $u'$  となる。この時も流れが定常であっても  $x$  方向の流体粒子は加速運動していることが分かる。そして、加速度の大きさは  $v$  及び  $\partial u / \partial y$  に比例すると言える。即ち加速度の大きさは  $v (\partial u / \partial y)$  である。慣性項における非定常項以外の項は対流項と呼ばれる。

## 2.8 流体力学における運動量保存則

一般力学において、物体の運動量が時間とともに変化する時には、その変化分に相当する力が物体に働くことが知られている。そしてこれを運動量保存則と呼んでいる。流体についてもこの運動量保存則が成り立つ。但し、流体は常に動いている為にこの運動量保存則を適用する際には注意が必要である。本節では流体力学で運動量保存則を適用する際の取り扱い方について述べる。流体中に置かれた物体に作用する流体力を求める時にはこの運動量保存則を利用すると便利である。

今、図 2.14 のような流体中に置かれた物体に作用する流体力について考える。流体は流体全域を考えることは現実的ではないので、物体を取り囲むような任意の流体塊を考えるのが一般的である。このような任意の流体塊のことを検査体積と呼び、またその境界のことを検査面と呼ぶ。

2.5 節の輸送定理における任意の関数  $f(\mathbf{x}, t)$  をここでは  $\rho \mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$  としよう。 $\rho$  は流体密度であり、 $\mathbf{u}$  は流体粒子の流速ベクトルである。 $f$  はスカラーとして与えたが、任意の関数なので  $u$  でも  $v$  でも  $w$  でも問題ない。つまりベクトル

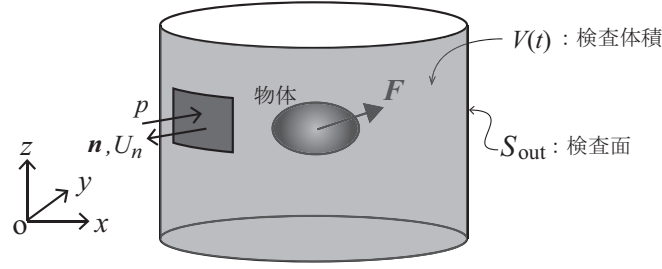


図 2.14: 流体中の物体に生じる力

ルとしても差し支えない。そうすると

$$\mathbf{I}(t) = \iiint_{V(t)} \rho \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) dV \quad (2.39)$$

は  $V(t)$  における流体の各方向軸の運動量の総和と理解することが出来る。この  $\mathbf{I}$  の時間変化は (2.25) で考えると分かり易く,

$$\frac{d\mathbf{I}}{dt} = \rho \iiint_V \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} dV + \rho \iint_{S_{out}} \mathbf{u} U_n dS \quad (2.40)$$

が得られる。2.5 節では一般論を導出するために  $S$  は流体領域の任意の境界であったが、ここでは  $S_{out}$  と明示している。また、 $U_n$  は検査面での法線方向流速である。

今、物体には流体力  $\mathbf{F}$  が働いている訳であるが、これは流体の圧力の総和として力が生じていると考えることが出来る。流体を中心に考えると物体から  $-\mathbf{F}$  の反作用による力を受けていることに注意しよう。また、流体境界の  $S_{out}$  にも圧力の総和として何らかの力が生じている。よって、運動量の変化分に相当する力が流体に働いているという運動量保存則より、

$$\rho \iiint_V \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} dV + \rho \iint_{S_{out}} \mathbf{u} U_n dS = -\mathbf{F} - \iint_{S_{out}} p \mathbf{n} dS \quad (2.41)$$

が流体領域  $V$  で成り立つ。 $\mathbf{n}$  は流体外向き法線と定義している為、 $S_{out}$  に作用する圧力による力はマイナスとしている。これが流体力学における運動量保存則である。そして、物体が流体から受ける力  $\mathbf{F}$  は

$$\mathbf{F} = -\rho \iiint_V \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} dV - \rho \iint_{S_{out}} \mathbf{u} U_n dS - \iint_{S_{out}} p \mathbf{n} dS \quad (2.42)$$

となる。

## 2.9 Bernoulli の定理

質点の運動において運動方程式を積分することによってエネルギー保存則を得ることが出来る。同様の考えで流体力学においても完全流体の運動方程式を積分することによりエネルギー保存則を導くことが出来る。これを流体力学では Bernoulli の定理と呼ぶ。流体力学では定常流の場合の Bernoulli の定理が良く用いられる。また、海事流体力学においては例えば波の構造物への荷重を求めることが多く、この場合は非定常の Bernoulli の定理が用いられる。

考える流れが定常であるとしよう。オイラーの運動方程式 (2.37) は

$$\begin{cases} u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} \\ u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} \\ u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} - g \end{cases} \quad (2.43)$$

となる。また、(2.15) に示す関係が一本の流線上では成り立つ。即ち、

$$v = u \frac{dy}{dx}, w = u \frac{dz}{dx} \quad (2.44)$$



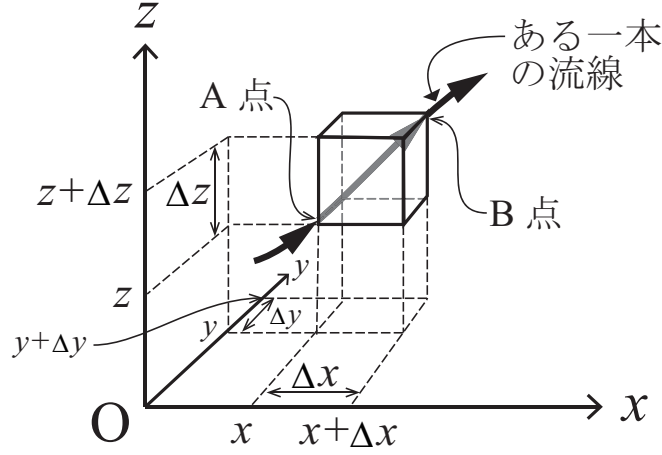


図 2.15: 流線

が成り立つ．これを (2.43) の第1式に代入して

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + u \frac{dy}{dx} \frac{\partial u}{\partial y} + u \frac{dz}{dx} \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} \quad (2.45)$$

を得る．さらにこれを変形して

$$\frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial(u^2)}{\partial x} + \frac{\partial(u^2)}{\partial y} \frac{dy}{dx} + \frac{\partial(u^2)}{\partial z} \frac{dz}{dx} \right\} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} \quad (2.46)$$

となる．また，同様に流線の関係式から

$$u = v \frac{dx}{dy}, w = v \frac{dz}{dy} \quad (2.47)$$

であるから，(2.43) の第2式に代入して

$$\frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial(v^2)}{\partial x} \frac{dx}{dy} + \frac{\partial(v^2)}{\partial y} + \frac{\partial(v^2)}{\partial z} \frac{dz}{dy} \right\} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} \quad (2.48)$$

を得る．再び同様に

$$u = w \frac{dx}{dz}, v = w \frac{dy}{dz} \quad (2.49)$$

であるから，(2.43) の第3式に代入して

$$\frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial(w^2)}{\partial x} \frac{dx}{dz} + \frac{\partial(w^2)}{\partial y} \frac{dy}{dz} + \frac{\partial(w^2)}{\partial z} \right\} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} - g \quad (2.50)$$

が得られる．

今，(2.46)  $\times dx$ ，(2.48)  $\times dy$ ，(2.50)  $\times dz$  として，3式を足すと以下を得る．

$$\frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial(U^2)}{\partial x} dx + \frac{\partial(U^2)}{\partial y} dy + \frac{\partial(U^2)}{\partial z} dz \right\} = -\frac{1}{\rho} \left\{ \frac{\partial p}{\partial x} dx + \frac{\partial p}{\partial y} dy + \frac{\partial p}{\partial z} dz \right\} - g dz \quad (2.51)$$

但し， $U^2 = u^2 + v^2 + w^2$  と定義する．(2.51) の左辺第1項の持つ意味は図 2.15 の A 点から B 点における  $U^2$  の変化分であり，右辺第1項は A 点から B 点における圧力変化分，第2項は A 点から B 点における  $z$  方向の位置の変化分である．即ち以下の様に書ける．

$$\frac{1}{2} d(U^2) + \frac{1}{\rho} dp + g dz = 0 \quad (2.52)$$

上式を積分すると

$$\frac{1}{2} U^2 + \int \frac{dp}{\rho} + g z = \text{constant} \quad (2.53)$$

を得る．非圧縮性の流体とすれば密度は一定である為、

$$\frac{1}{2}U^2 + \frac{1}{\rho}p + gz = \text{constant} \quad (2.54)$$

となる．上式の第1項を比運動エネルギー，第2項を比圧送エネルギー，第3項を比位置エネルギーと呼ぶ．この式より1本の流線上でエネルギーの総和は一定である．

以上は定常の流れの Bernoulli の定理について考えた．この考えを拡張して非定常の流れにおける Bernoulli の定理を導いてみる．図 2.16 に示される様に  $t = t$  と  $t = t + \Delta t$  において流線の接線方向流速に時間変化があるわけであるから (2.51) の左辺に非定常項を加える．即ち、(2.51) の導出の時と同じく、(2.37) の  $x$  方向、 $y$  方向、 $z$  方向の Euler の運動方程式の非定常項に  $dx$ 、 $dy$ 、 $dz$  をそれぞれ掛け、それら3式を加える．また、これを 2.10 節で示す速度ポテンシャルの定義を使って整理してみると、

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} dx + \frac{\partial v}{\partial t} dy + \frac{\partial w}{\partial t} dz &= \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \Phi}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \Phi}{\partial y} dy + \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \Phi}{\partial z} dz \\ &= \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial \Phi}{\partial t} dx + \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial \Phi}{\partial t} dy + \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial \Phi}{\partial t} dz = d \left( \frac{\partial \Phi}{\partial t} \right) \end{aligned} \quad (2.55)$$

となる．よって、(2.52) に非定常項が加わった

$$d \left( \frac{\partial \Phi}{\partial t} \right) + \frac{1}{2} d(U^2) + \frac{1}{\rho} dp + g dz = 0 \quad (2.56)$$

となり、これを積分して

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{1}{2} U^2 + \frac{1}{\rho} p + gz = \text{constant} \quad (2.57)$$

が得られる．これを一般化された Bernoulli の定理と言う．

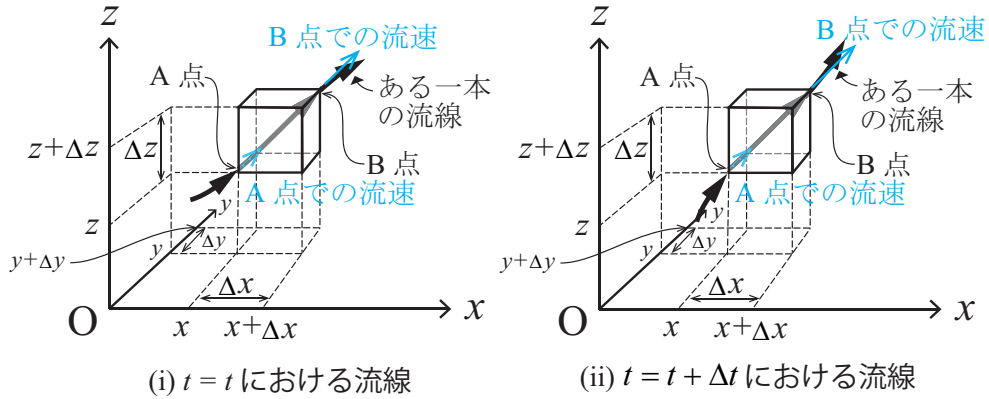


図 2.16: 流線の時間変化

## 2.10 速度ポテンシャルと流れ関数と複素速度ポテンシャル

完全流体は非粘性流体と定義される．また、海洋工学において流体は非圧縮流れを扱うことがほとんどであるので、ここでは非圧縮、非粘性流体を考える．完全流体の力学において、流れの数学的な取り扱いを容易にするものに速度ポテンシャルというものがある．速度ポテンシャルで定義される流れ場をポテンシャル流れと言うこともある．また、流線の様子を表すための関数を流れ関数という．今、ある流場の流速を  $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = (u(\mathbf{x}, t), v(\mathbf{x}, t), w(\mathbf{x}, t))$  とする．速度ポテンシャル  $\Phi(\mathbf{x}, t)$  は流速成分を用いて

$$u(\mathbf{x}, t) = \frac{\partial \Phi(\mathbf{x}, t)}{\partial x}, \quad v(\mathbf{x}, t) = \frac{\partial \Phi(\mathbf{x}, t)}{\partial y}, \quad w(\mathbf{x}, t) = \frac{\partial \Phi(\mathbf{x}, t)}{\partial z} \quad (2.58)$$

と定義される。『海洋工学を学ぶ人のための流体力学，第2版』<sup>[18]</sup> 第4章の(4.21)，(4.22)，(4.23)より各軸周りの流体粒子の回転角速度  $\Omega = (\Omega_x, \Omega_y, \Omega_z)$  は

$$\Omega_x = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \right), \quad \Omega_y = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right), \quad \Omega_z = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) \quad (2.59)$$

である。(2.58) 式を (2.59) 式に代入して計算すると，例えば  $\Omega_x$  に関して

$$\Omega_x = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z \partial y} \right) = 0 \quad (2.60)$$

が得られる。他の角速度も  $\Omega_y = 0$ ,  $\Omega_z = 0$  が成り立つ。この関係より速度ポテンシャルが定義される流れは渦無し流れと呼ばれる。

また，非圧縮性流体の連続の式である (2.33) 式より，(2.58) の関係式を代入して整理すると

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = 0 \quad (2.61)$$

を得る。即ち，速度ポテンシャル  $\Phi$  は偏微分方程式の一つであるラプラスの式を満足しなくてはならない。逆に，一般的にはラプラスの式を境界条件及び初期条件の下で解くことで速度ポテンシャル  $\Phi$  を求め，(2.58) に従い各方向成分で偏微分することにより各点の流速分布を求めることが出来る。これが，流れの数学的取り扱いを容易にする所以である。

次に流れ関数  $\Psi(\mathbf{x}, t)$  と呼ばれるものについて考えてみる。速度ポテンシャルは2次元でも3次元でも成り立つスカラー関数であるが，流れ関数は2次元の流れ場でしか成り立たないことに注意を要する。今，2次元流れ場の流速を  $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = (u(\mathbf{x}, t), v(\mathbf{x}, t))$  と定義する。勿論， $\mathbf{x} = (x, y)$  である。流れ関数は以下によって定義される。

$$u(\mathbf{x}, t) = \frac{\partial \Psi(\mathbf{x}, t)}{\partial y}, \quad v(\mathbf{x}, t) = -\frac{\partial \Psi(\mathbf{x}, t)}{\partial x} \quad (2.62)$$

(2.62) で定義される流れ関数  $\Psi$  を2次元の連続の式に代入してみると

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y \partial x} = 0 \quad (2.63)$$

となることが分かる。即ち，流れ関数は連続の式を自動的に満足する。また，ポテンシャル流れは渦無し流れでもある。 $x-y$  平面における流れでは  $z$  軸周りの回転  $\Omega_z$  のみ考えることとなる。 $\Omega_z = 0$  であることが求められるから，(2.59) に流れ関数を代入して整理すると，

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} = 0 \quad (2.64)$$

が得られる。即ち，渦無しの条件より流れ関数は2次元のラプラスの式を満足する。

流れ関数  $\Psi(\mathbf{x}, t) = \text{const.}$  は一本の流線を表す。以下，このことを説明していく。図 2.17 に  $\Psi = \text{const.}$  を繋いだ線の様子を描いている。当たり前であるが A 点および B 点では  $\Psi$  は同じ値となるので，A 点から B 点は以下の様な関係が成り立つ。

$$d\Psi = \frac{\partial \Psi}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial \Psi}{\partial y} \Delta y = 0 \quad (2.65)$$

(2.62) 式の流れ関数と流速の関係式を (2.65) 式に代入し変形すると以下の式を得る。

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{-\partial \Psi / \partial x}{\partial \Psi / \partial y} = \frac{v}{u} \quad (2.66)$$

図中で  $\Delta y / \Delta x$  は  $\tan \theta$  を表し，(2.66) 式ではこれが  $v/u$  となる関係を得たこととなる。 $v/u$  は流体粒子の向きを表しているので， $\Psi = \text{const.}$  を繋いだ線は一本の流線を表していることを意味すると言える。

2次元流れ場において，速度ポテンシャル  $\Phi(x, y)$ ，流れ関数  $\Psi(x, y)$  を用いて

$$f(z) = \Phi(x, y) + i\Psi(x, y) \quad (2.67)$$

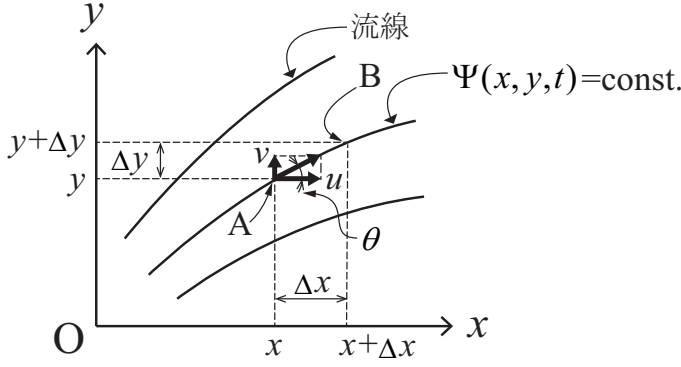
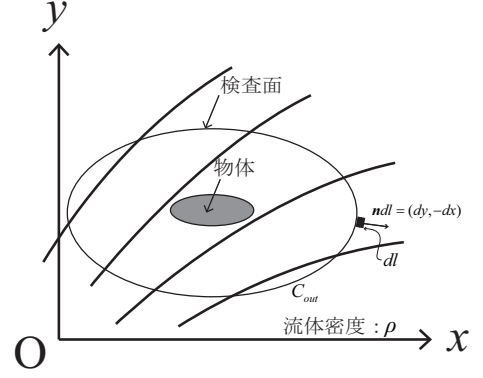
図 2.17: 流れ関数  $\Psi$  の物理的意味

図 2.18: 検査面内の物体

と定義するものを複素速度ポテンシャルと言う。但し、 $i = \sqrt{-1}$  であり、 $z$  はガウス平面を表しており、 $z = x + iy$  または極座標表示  $z = re^{i\theta}$  で表される。複素速度ポテンシャルを  $z$  で微分したものを複素速度あるいは共有速度と言い、以下が成り立つ。

$$\frac{df}{dz} = u - iv = \frac{\partial \Phi}{\partial x} + i \frac{\partial \Psi}{\partial x} = \frac{\partial \Psi}{\partial y} - i \frac{\partial \Phi}{\partial y} \quad (2.68)$$

## 2.11 Blasius の公式

ポテンシャル理論において、速度ポテンシャルが求められたら流速が求められる。流速が求められたら圧力が求まる。圧力を積分することで物体に生じる流体力を求めることが出来るわけだが、別の求め方として運動量保存則を用いて物体を取り囲む遠方の検査面を積分することにより物体に生じる力を求める方法を紹介しよう。

定常的な流れの中に物体が置かれている場合を考える。(2.42) で示した運動量保存則より物体に生じる力  $\mathbf{F}$  ( $= (F_x, F_y)$ ) は

$$\mathbf{F} = -\rho \int_{C_{out}} \mathbf{u} U_n dl - \int_{C_{out}} p \mathbf{n} dl \quad (2.69)$$

と表される。ここで、(2.42) における  $dS$  は 2 次元問題の為  $dl$  に、 $S_{out}$  は  $C_{out}$  に置き換わっている。また、 $\mathbf{n}$  は外向き法線を正としていることに注意して、 $\mathbf{n} dl = (dy, -dx)$  である。 $C_{out}$  における流速ベクトルを  $(u, v)$ 、圧力を  $p$  として、また Beroulli の定理よりよどみ圧力を  $p_0$  として

$$p = p_0 - \frac{1}{2} \rho (u^2 + v^2) \quad (2.70)$$

が成り立つ。よって (2.69) は

$$\mathbf{F} = -\rho \int_{C_{out}} (u, v) (u, v) \cdot (dy, -dx) - \int_{C_{out}} \left\{ p_0 - \frac{1}{2} \rho (u^2 + v^2) \right\} (dy, -dx) \quad (2.71)$$

で与えられる。これを整理すると

$$\begin{aligned} F_x &= -\frac{1}{2} \rho \int_{C_{out}} (u^2 dy - 2uv dx - v^2 dy) \\ F_y &= -\frac{1}{2} \rho \int_{C_{out}} (u^2 dx + 2uv dy - v^2 dx) \end{aligned} \quad (2.72)$$

が得られる。尚、よどみ圧力  $p_0$  による力は周回積分より 0 となる。

(2.68) の複素速度を用いて上式と (2.73) は同等となる。

$$F_x - iF_y = \frac{i\rho}{2} \oint_C \left( \frac{df}{dz} \right)^2 dz \quad (2.73)$$

ここで、 $C$  は物体を取り囲む任意の曲線である。この (2.73) のことを Blasius の公式と言う。複素速度ポテンシャルが求まれば直ちにこの式を用いて物体に作用する流体力を求めることが可能である。

## 第 3 章

# 完全流体の力学 (2 次元編)

2 章では完全流体の基礎的方程式である連続の式や Euler の運動方程式や Bernoulli の定理について述べた。これに加えて速度ポテンシャル、流れ関数というスカラー関数の概念を導入した。完全流体の力学において Euler の運動方程式や連続の式を解いて流速や圧力を求めることはまず行われない。連続の式一つ取り上げてみても、数学的な理論解法が存在しないからである。更には、Euler の運動方程式についても非線形項である対流項が存在しており、これも数学的な理論的解法が存在していない。一方で、速度ポテンシャルの概念を導入した場合、これを連続の式に代入することにより、Laplace 方程式になることを 2.10 節で知った。Laplace 方程式の一般的な解法は既に完成されており、解析的に速度ポテンシャルを求め、流速や圧力を求めることが可能となる。その為、完全流体の力学では速度ポテンシャルを求めることに帰着され、この手法を用いた完全流体の力学の問題はポテンシャル問題やポテンシャル理論とも呼ばれている。

本章では代表的な 2 次元ポテンシャル流れを取り上げる。2 次元のポテンシャル流れは複素速度ポテンシャルを用いることが出来、複素解析と組み合わせることにより、数学的な取り扱いを容易にし、流体運動の基礎的な知見を与えてくれる。

### 3.1 流れの基本要素

ポテンシャル理論の基本的な考え方として、様々な流れは流れの基本要素の重ね合わせにより表現する。速度ポテンシャルは Laplace 方程式の基本解である為、数学的にも重ね合わせが成り立つというところに由来している。基本要素の流れとして、(1) 一様流れ、(2) 湧き出し・吸い込み、(3) 渦糸、(4) 二重湧き出し等が挙げられる。これらは Laplace 方程式の基本解でもある。

#### (1) 一様流れ

今、図 3.1 に示すような一様流を考える。 $U$  は流速であり、 $x$  軸に対して  $\alpha$  傾いているとする。流速  $\mathbf{u} = (u, v)$  はそれぞれ

$$\begin{aligned} u &= U \cos \alpha \\ v &= U \sin \alpha \end{aligned} \quad (3.1)$$

である。よって複素速度は

$$\frac{df}{dz} = U (\cos \alpha - i \sin \alpha) = U e^{-i\alpha} \quad (3.2)$$

となる。これを積分して一様流の複素速度ポテンシャルは

$$f(z) = U e^{-i\alpha} z \quad (3.3)$$

で表される。ちなみに、ここから実部、虚部を取り出せば速度ポテンシャル  $\Phi(x, y)$ 、流れ関数  $\Psi(x, y)$  を求めることが出来、

$$\begin{aligned} \Phi(x, y) &= U (x \cos \alpha + y \sin \alpha) \\ \Psi(x, y) &= U (y \cos \alpha - x \sin \alpha) \end{aligned} \quad (3.4)$$

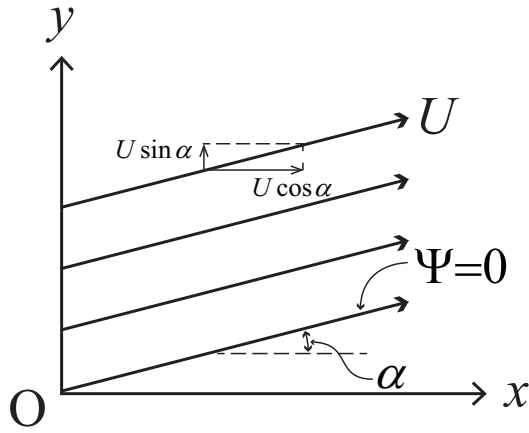


図 3.1: 一様流

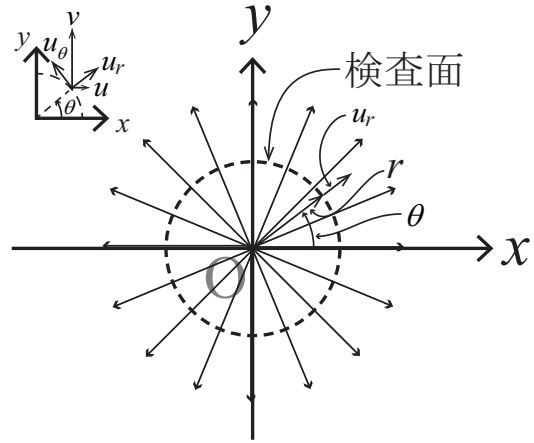


図 3.2: 湧き出し

を得る．ここから (3.4) の速度ポテンシャルを  $x$  及び  $y$  で偏微分したものが各方向流速になっていることが容易に確かめられる．また， $\Psi = 0$  とした場合，

$$y = x \tan \alpha \quad (3.5)$$

を得る． $\Psi = \text{const.}$  が一本の流線を表しているので，傾き  $\tan \alpha$  の直線であることが確かめられる (3.1).

## (2) 湧き出し・吸い込み

次の基本要素の流れとして湧き出し・吸い込みを取り上げる．図 3.2 に示す様に，原点  $o$  から流れが放射方向に流れ出ている流れを考える．流れ出る流量を  $Q$  とする．検査面を図の様に設け，ここでの半径方向流速を  $u_r$  とし，以下の関係が成り立つ．

$$Q = \int_0^{2\pi} u_r r d\theta \quad (3.6)$$

$u_r$ ,  $r$  は検査面において一定であるので，以下の式を得る．

$$u_r = \frac{Q}{2\pi r} \quad (3.7)$$

また， $u_r$  に直交する接線方向の流速  $u_\theta$  は  $u_\theta = 0$  となる．図中左上に示されている流速の成分分解の関係より， $x$  方向流速， $y$  方向流速の  $u$ ,  $v$  は

$$\begin{aligned} u &= u_r \cos \theta - u_\theta \sin \theta = \frac{Q}{2\pi r} \cos \theta \\ v &= u_r \sin \theta + u_\theta \cos \theta = \frac{Q}{2\pi r} \sin \theta \end{aligned} \quad (3.8)$$

となる．複素速度は

$$\frac{df}{dz} = \frac{Q}{2\pi r} (\cos \theta - \sin \theta) = \frac{Q}{2\pi r e^{i\theta}} = \frac{Q}{2\pi z} \quad (3.9)$$

となるので，複素速度ポテンシャルは

$$f(z) = \frac{Q}{2\pi} \log z \quad (3.10)$$

となる．尚， $Q > 0$  が湧き出しであり， $Q < 0$  が吸い込みを意味する．また，虚部を取り出した流れ関数は

$$\Psi(r, \theta) = \frac{Q}{2\pi} \theta \quad (3.11)$$

であり， $\Psi = \text{const.}$  は原点から放射状に伸びた線を表す．このことからこの複素速度ポテンシャルは原点から流れ出る様子を表していることが確認できる．

## (3) 渦糸



3つ目は渦糸である．図 3.3 に示す様に，原点  $O$  を中心として半時計回りの渦糸が存在しているとする．この渦糸が作る半径  $r$  における検査面での循環が  $\Gamma$  であるとする．(2.18) に示した循環の定義より， $u_\theta$  を回転流における接線方向流速として

$$\Gamma = \int_0^{2\pi} u_\theta r d\theta \quad (3.12)$$

となる． $u_\theta$  及び  $r$  は検査面において一定であるから， $u_\theta$  は

$$u_\theta = \frac{\Gamma}{2\pi r} \quad (3.13)$$

となる．この流れにおいて半径方向流速  $u_r$  は  $u_r = 0$  となる．図 3.3 の左上図から分かるように， $x$  方向， $y$  方向流速は

$$\begin{aligned} u &= u_r \cos \theta - u_\theta \sin \theta = -\frac{\Gamma}{2\pi r} \sin \theta \\ v &= u_r \sin \theta + u_\theta \cos \theta = \frac{\Gamma}{2\pi r} \cos \theta \end{aligned} \quad (3.14)$$

であり，複素速度は

$$\frac{df}{dz} = -\frac{i\Gamma}{2\pi r} (\cos \theta - i \sin \theta) = -\frac{i\Gamma}{2\pi z} \quad (3.15)$$

が得られ，ここから渦糸の複素速度ポテンシャルは

$$f(z) = -\frac{i\Gamma}{2\pi} \log z \quad (3.16)$$

を得る．尚， $\Gamma > 0$  の時に反時計周りの渦糸を表し， $\Gamma < 0$  の時に時計回りの渦糸を表す．流れ関数  $\Psi$  は，

$$\Psi(r, \theta) = -\frac{\Gamma}{2\pi} \log r \quad (3.17)$$

であり， $\Psi = \text{const.}$  は  $r = \text{const.}$  となることから図 3.3 の様に半径が等しいところが渦糸の一本の流線を表す．

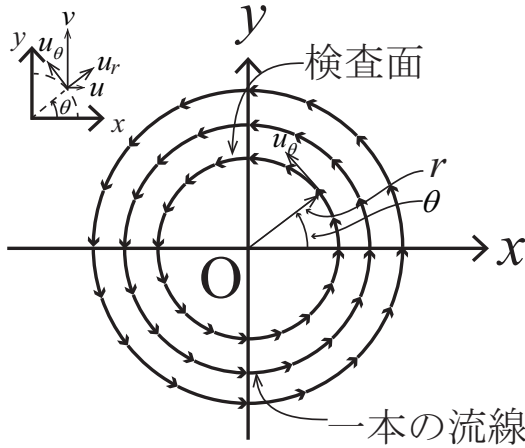


図 3.3: 渦糸

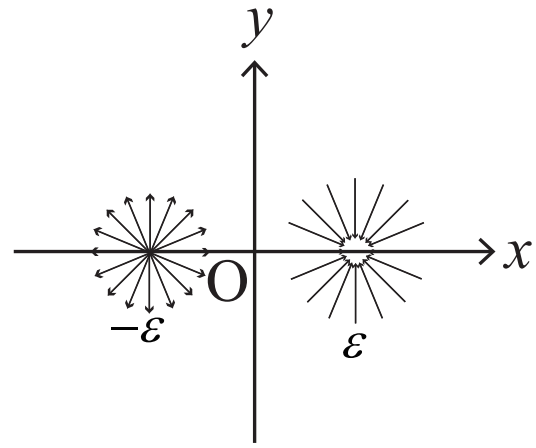


図 3.4: 二重湧き出しの導出

ポテンシャル流れは渦無しであるはずである．この渦糸はどうであろうか．この流れ場の渦度  $\omega$  は

$$\omega = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ -\frac{\Gamma}{2\pi r} \sin \theta & \frac{\Gamma}{2\pi r} \cos \theta & 0 \end{vmatrix} \quad (3.18)$$

である．ここで， $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ ， $\cos \theta = x/r$ ， $\sin \theta = y/r$  であるから，これを計算して  $\omega = 0$  を得る．よって渦糸はポテンシャル理論の大原則である渦無しは満たしていることが分かる．渦糸は流体力学的には渦無しの渦とも呼ばれ

る。

#### (4) 二重湧き出し

基本要素の四つ目が二重湧き出しである。基本的な流れの要素の組み合わせから導出されるため基本要素には属さないようにも思われるが、極限の操作により一つのポテンシャルで表される為、やはり基本要素と言えよう。今、図 3.4 に示される様に  $x = -\epsilon$  の位置に湧き出しを、 $x = \epsilon$  の位置に吸い込みを置く。この時の複素速度ポテンシャルは

$$\frac{Q}{2\pi} \{\log(z + \epsilon) - \log(z - \epsilon)\} \quad (3.19)$$

となる。極限操作 ( $\epsilon \rightarrow 0$ ) の為に以下のように式変形を行う。

$$\frac{Q}{2\pi} \log \frac{z + \epsilon}{z - \epsilon} = \frac{Q}{2\pi} \log \frac{1 + \frac{\epsilon}{z}}{1 - \frac{\epsilon}{z}} = \frac{Q}{2\pi} \left\{ \log \left( 1 + \frac{\epsilon}{z} \right) - \log \left( 1 - \frac{\epsilon}{z} \right) \right\} \quad (3.20)$$

$\epsilon$  は後の極限操作で 0 に近づけるので  $\epsilon/z$  周りの Taylor 展開を考える。 $\log(1+x)$  の 1 次近似は下記であるから

$$\log(1+x) = x + \dots \quad (3.21)$$

これを利用する。また、湧き出しと吸い込みの距離  $2\epsilon$  を近づける。この際、湧き出しと吸い込みの大きさ  $Q$  を調整しながら近づける。即ち、 $2\epsilon Q \rightarrow \mu$  という極限にする。

$$f(z) = \lim_{2\epsilon Q \rightarrow \mu} \frac{Q}{2\pi} \left\{ \log \left( 1 + \frac{\epsilon}{z} \right) - \log \left( 1 - \frac{\epsilon}{z} \right) \right\} = \lim_{2\epsilon Q \rightarrow \mu} \left\{ \frac{2\epsilon Q}{2\pi z} \right\} = \frac{\mu}{2\pi z} \quad (3.22)$$

(3.22) を二重湧き出しの複素速度ポテンシャルという。以上の 4 つの基本要素を用いて様々な流れ解析が行うことができる。

二重湧き出しの特性をもう少し分析してみよう。簡単のために、仮に  $\mu = 2\pi$  とする。速度ポテンシャル、流れ関数は

$$\begin{aligned} \Phi(x, y) &= \frac{1}{2\pi} \frac{x}{x^2 + y^2} \\ \Psi(x, y) &= -\frac{1}{2\pi} \frac{y}{x^2 + y^2} \end{aligned} \quad (3.23)$$

となる。 $\Psi = \text{const.}$  が一本の流線を表すから  $\Psi = -1$  の時の流線を考えると、 $x^2 + (y - \frac{1}{2})^2 = \frac{1}{4}$  となり、図 3.5 に示すように中心点  $(0, \frac{1}{2})$ 、半径  $\frac{1}{2}$  の円が一本の流線となることが分かる。

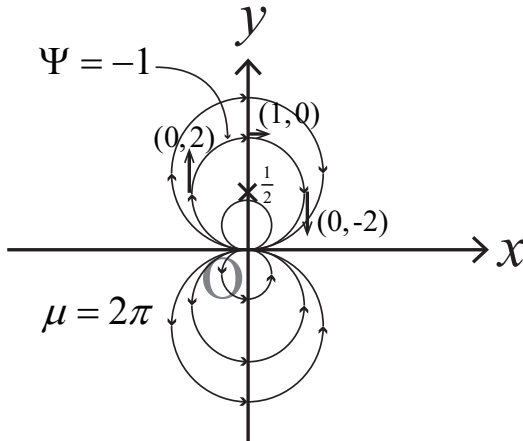


図 3.5: 二重湧き出し

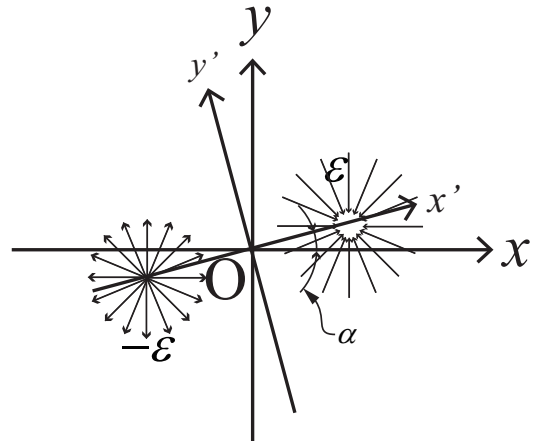


図 3.6: 軸が傾いた場合の二重湧き出し

速度ポテンシャルより、この二重湧き出しの流れ場の流速は

$$\begin{aligned} u(x, y) &= \frac{\partial \Phi}{\partial x} = \frac{-x^2 + y^2}{(x^2 + y^2)^2} \\ v(x, y) &= \frac{\partial \Phi}{\partial y} = \frac{-2xy}{(x^2 + y^2)^2} \end{aligned} \quad (3.24)$$

となる．流線上  $(x^2 + (y - \frac{1}{2})^2 = \frac{1}{4})$  では、

$$\begin{aligned} u(x, y) &= \frac{2y^2 - y}{y^2} \\ v(x, y) &= \frac{-2xy}{y^2} \end{aligned} \quad (3.25)$$

となる．これより、図 3.5 に示すように、 $(x, y) = (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$  の位置における流速  $(u, v)$  は  $(0, 2)$ 、 $(x, y) = (0, 1)$  では  $(1, 0)$ 、 $(x, y) = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$  では  $(0, -2)$  を得る．即ち、吹き出しを置いた方から吸い込みの方に流れが流れていることが確認できる．

この二重湧き出しは  $y = 0$  に対して線対称なものであった．この軸が  $\alpha$  傾いている場合の二重湧き出しについて考えてみる．図 3.6 に示す様に、湧き出しと吸い込みを  $y'$  上の  $x' = -\epsilon$  及び  $x' = \epsilon$  に置く．湧き出し、吸い込みのそれぞれの位置は  $x, y$  座標系だと  $z = -\epsilon \cos \alpha - i\epsilon \sin \alpha = -\epsilon e^{i\alpha}$ 、 $z = \epsilon \cos \alpha + i\epsilon \sin \alpha = \epsilon e^{i\alpha}$  である．よって、これらを組み合わせた複素速度ポテンシャルは

$$\frac{Q}{2\pi} \log(z + \epsilon e^{i\alpha}) - \frac{Q}{2\pi} \log(z - \epsilon e^{i\alpha}) \quad (3.26)$$

となる．この極限は先程と同様の方法に従う．即ち、

$$\frac{Q}{2\pi} \log \frac{z + \epsilon e^{i\alpha}}{z - \epsilon e^{i\alpha}} = \frac{Q}{2\pi} \log \frac{1 + \frac{\epsilon e^{i\alpha}}{z}}{1 - \frac{\epsilon e^{i\alpha}}{z}} = \frac{Q}{2\pi} \left\{ \log \left( 1 + \frac{\epsilon e^{i\alpha}}{z} \right) - \log \left( 1 - \frac{\epsilon e^{i\alpha}}{z} \right) \right\} \quad (3.27)$$

と、変形し、 $\epsilon \rightarrow 0$  の極限を考えれば  $\frac{\epsilon e^{i\alpha}}{z}$  は大変小さいので、Taylor 展開の 1 次近似を用いて次の極限計算となる．この際、 $2\epsilon Q \rightarrow \mu$  を用いている．

$$f(z) = \lim_{2\epsilon Q \rightarrow \mu} \frac{Q}{2\pi} \left( \frac{2\epsilon e^{i\alpha}}{z} \right) = \frac{\mu}{2\pi z} e^{i\alpha} \quad (3.28)$$

この (3.28) が軸が傾斜している時の二重湧き出しとなる．

湧き出しと吸い込みとを組み合わせ、極限まで近づけることで二重湧き出しが求められた．更に分析を進めることで湧き出しと二重湧き出しはどのように数学的に関係づけられるのかを考えてみたい．このことを理解することは Green の定理を用いた境界要素法の物理的な解釈に繋がる．海洋工学において、境界要素法は浮体に生じる波力や浮体が波の中で揺れる際の放射波 (radiation wave) 等の解析で用いられる有用な手法である．

任意の 2 点  $Q(x_Q, y_Q)$  及び  $Q_1(x_{Q1}, y_{Q1})$  に湧き出しと、吸い込みが置かれている場合、点  $P(x, y)$  における速度ポテンシャルは

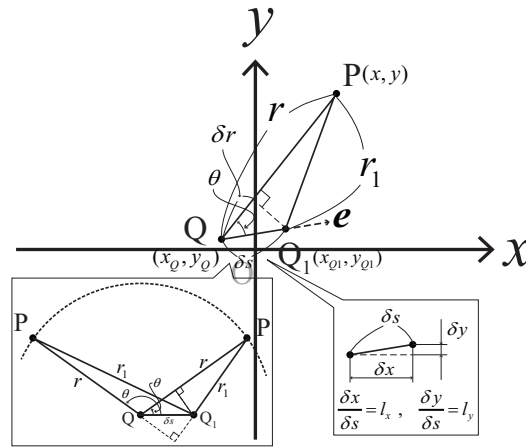


図 3.7: 湧き出しと二重湧き出しの数学的関係

$$\Phi(x, y) = \frac{Q}{2\pi} (\log r - \log r_1) = -\frac{Q}{2\pi} (\log r_1 - \log r) \quad (3.29)$$

である。ここで、 $r = \sqrt{(x - x_Q)^2 + (y - y_Q)^2}$  であり、 $r_1 = \sqrt{(x - x_{Q_1})^2 + (y - y_{Q_1})^2}$  である。今、 $\delta$  を点  $Q_1$  から点  $Q$  の物理量の差分を表すものとすれば、上式は

$$\begin{aligned}\Phi(x, y) &= -\frac{Q}{2\pi} \delta(\log r) = -\frac{Q}{2\pi} \left\{ \frac{\partial}{\partial x_Q} (\log r) \delta x_Q + \frac{\partial}{\partial y_Q} (\log r) \delta y_Q \right\} = -\frac{Q}{2\pi} \delta \mathbf{r}_Q \cdot \text{grad}_Q (\log r) \\ &= -\frac{Q \delta s}{2\pi} \mathbf{e} \cdot \text{grad}_Q (\log r) = \frac{Q \delta s}{2\pi} \mathbf{e} \cdot \text{grad} (\log r) = \frac{Q \delta s}{2\pi} \frac{\partial}{\partial s} (\log r)\end{aligned}\quad (3.30)$$

となる。上式において、 $\delta x_Q = x_{Q_1} - x_Q$ 、 $\delta y_Q = y_{Q_1} - y_Q$ 、 $\delta \mathbf{r}_Q = (\delta x_Q, \delta y_Q)$  である。また、線分  $QQ_1$  の大きさを  $\delta s$ 、 $QQ_1$  の単位方向ベクトルを  $\mathbf{e}$  として、 $\overrightarrow{QQ_1} = \delta \mathbf{r}_Q = \mathbf{e} \delta s$  を用いている。 $\text{grad}_Q$  は  $\left( \frac{\partial}{\partial x_Q}, \frac{\partial}{\partial y_Q} \right)$  と定義され、 $\text{grad} \equiv \left( \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y} \right)$  の為、 $+-$  が入れ替わった。最後に、 $\mathbf{e} \cdot \text{grad}$  は  $\mathbf{e} = (l_x, l_y)$  として、

$$\frac{\partial}{\partial s} = \frac{\partial x}{\partial s} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial s} \frac{\partial}{\partial y} = l_x \frac{\partial}{\partial x} + l_y \frac{\partial}{\partial y} = \mathbf{e} \cdot \text{grad} \quad (3.31)$$

の関係を用いている。

また、

$$\Phi(x, y) = -\frac{Q}{2\pi} \delta(\log r) = -\frac{Q}{2\pi} \frac{\delta r}{r} = \frac{Q \delta s \cos \theta}{2\pi r} \quad (3.32)$$

としても表すことが出来る。ここで、 $\delta r = r_1 - r = -\delta s \cos \theta$  の関係を用いている (図 3.7 左下参照)。 $Q \delta s \rightarrow \mu$  としたものが二重湧き出しであった。更に、(3.32) は  $\mu = 2\pi$ 、 $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ 、 $\cos \theta = x/r$  として考えれば (3.23) と同じだと分かる。また、(3.32) の軸は  $\overrightarrow{QQ_1}$  の方向であることをここで改めて言及しておきたい。

以上の (3.30) 及び (3.32) より、湧き出し及び吸い込みの方向微分したもの ( $\partial/\partial s(\log r)$ ) が二重湧き出し ( $\cos \theta/r$ ) であり、またその方向は二重湧き出しの軸に一致することが確認できる。

2次元の境界要素法における境界積分方程式では  $n$  を法線として

$$\frac{\partial}{\partial n} (\log r) \quad (3.33)$$

という項が生じる。これは法線方向に軸を持つ二重湧き出しを意味している。

## 3.2 一様流中に置かれた円柱

図 3.8 に示されるように半径  $a$  の円柱が流速  $U$  の一様流れ中に置かれている流れを考えてみたい。ポテンシャル理論は基礎的な流れの組み合わせによって様々な流れを表すことは既に 3.1 節で述べた。この流れ場は図 3.9 に示すように一様流と二重湧き出しの組み合わせで表されることが知られている。また、流れは十分に時間が経って定常な流れになっているとし、時間  $t$  に依らないものとする。この複素速度ポテンシャルは

$$f(z) = Uz + \frac{\mu}{2\pi z} \quad (3.34)$$

である。この段階で二重湧き出しの強さ  $\mu$  は未知数である。この  $\mu$  の強さを境界条件に合わせて求めることで一様流中に置かれる円柱周りの複素速度ポテンシャルが求めることがポテンシャル理論の特徴である。

この場合の境界条件は  $u_r$  を円柱半径方向流速として、円柱表面上 ( $r = a$ ) において  $u_r = 0$  である。即ち、円柱から流体が流れ出てくことは無いという条件であるが、2.2 節で示したことを基に示してみよう。(2.10) より、 $r = a$  において

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = (u, v) \cdot (\cos \theta, \sin \theta) = 0 \quad (3.35)$$

である。図 3.9 の右下図より、 $u \cos \theta + v \sin \theta = u_r$  であるから、ここからも円柱上での境界条件が  $u_r = 0$  であることが示される。

さて、この境界条件を用いて当初の目的であった二重湧き出しの強さ  $\mu$  を求める。未知数が一つであるから一つの境界条件で十分である。複素速度ポテンシャルから実部を取り出せば速度ポテンシャルを求めることが出来る。極座標  $z = re^{i\theta}$  を用いて

$$\Phi(r, \theta) = \left( Ur + \frac{\mu}{2\pi r} \right) \cos \theta \quad (3.36)$$

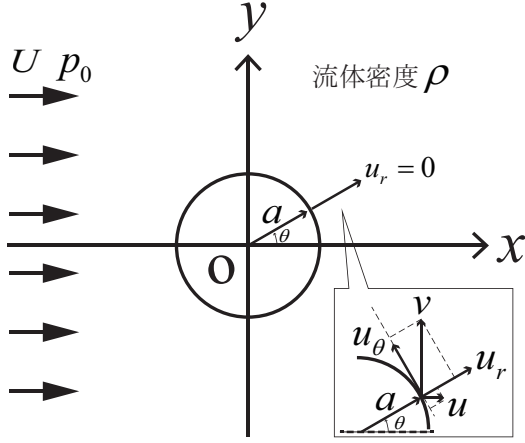


図 3.8: 一様流中に置かれた円柱

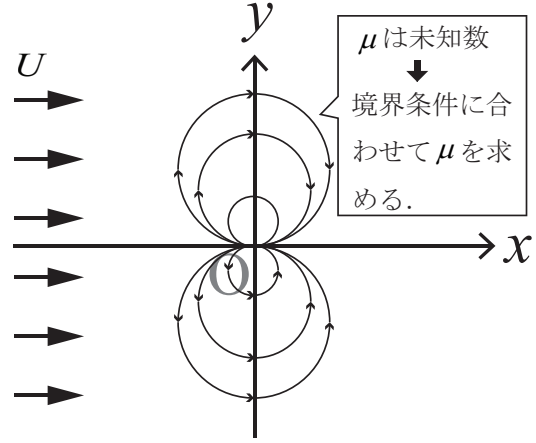


図 3.9: 一様流と二重湧き出しの組み合わせ

が速度ポテンシャルとして得られる。  $u_r = \frac{\partial \Phi}{\partial r}$  であるので、半径方向流速は

$$u_r = \frac{\partial \Phi}{\partial r} = \left( U - \frac{\mu}{2\pi r^2} \right) \cos \theta \quad (3.37)$$

で与えられる。  $r = a$  で  $u_r = 0$  が境界条件であるから

$$\mu = 2\pi a^2 U \quad (3.38)$$

となる。以上より一様流中の複素速度ポテンシャルは

$$f(z) = U \left( z + \frac{a^2}{z} \right) \quad (3.39)$$

となる。また、速度ポテンシャルは

$$\Phi(r, \theta) = U \left( r + \frac{a^2}{r} \right) \cos \theta \quad (3.40)$$

となる。

ポテンシャル理論の一つの特徴が複素速度ポテンシャルなり速度ポテンシャルを求めることによってここから流れ場における各点の流速なり、圧力なりが陽に求まることである。流体力学の目的の一つが流れ場や流速分布の可視化や構造物に生じる流体荷重を求めることにある。ここではまず円柱周りにおける流速分布について求めてみよう。

$r = a$  において境界条件からも明らかなように半径方向流速  $u_r$  は 0 である。接線方向流速  $u_\theta$  は

$$u_\theta|_{r=a} = \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \Big|_{r=a} = 2U \sin \theta \quad (3.41)$$

となる。図 3.10 に流速分布を示す。  $u_\theta$  は反時計回りが正であることに注意を要する。流速が 0 となる点のことをよどみ点と呼ぶ。円柱周りであれば  $\theta = 0, 180^\circ$  がよどみ点である。次に圧力分布については Bernoulli の定理から考える。十分上流の流速は  $U$ 、圧力は  $p_0$  である。円柱周りの流速は  $\sqrt{u_r^2 + u_\theta^2} = u_\theta$  であり、圧力を  $p_\theta$  として、

$$\frac{1}{2} \rho U^2 + p_0 = \frac{1}{2} \rho (-2U \sin \theta)^2 + p_\theta \quad (3.42)$$

が成り立つ。ここで流体の密度を  $\rho$  とした。これより円柱周りの圧力  $p_\theta$  は

$$p_\theta = p_0 + \frac{1}{2} \rho U^2 (1 - 4 \sin^2 \theta) \quad (3.43)$$

となる。

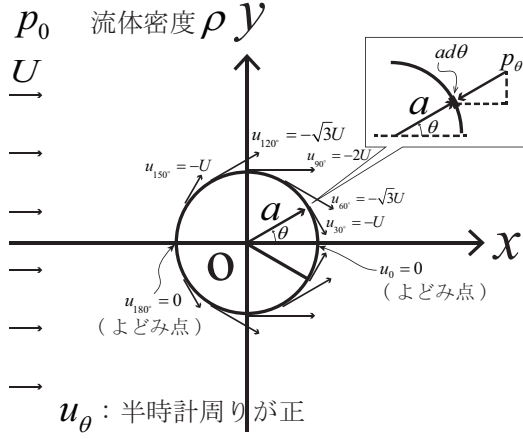


図 3.10: 円柱表面における流速分布

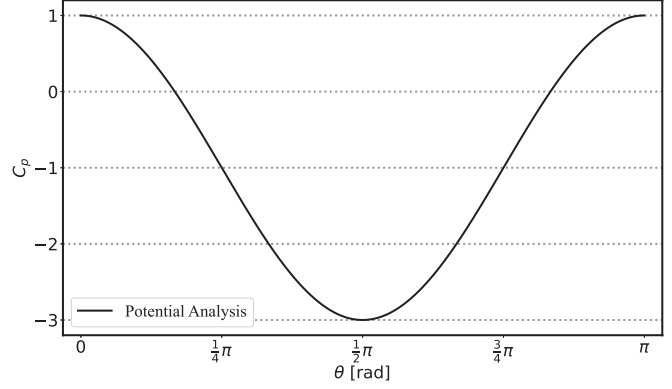


図 3.11: 円柱表面の圧力係数

円柱周りの圧力が求められたのでここから円柱に生じる流体力を求めることができる。図 3.10 の右上図の關係に留意して、また、その流体力を  $F_x, F_y$  として、以下を得る。

$$\begin{aligned} F_x &= - \int_0^{2\pi} p_\theta \cos \theta a d\theta = -a \int_0^{2\pi} \left\{ p_0 + \frac{1}{2} \rho U^2 (1 - 4 \sin^2 \theta) \right\} \cos \theta d\theta = 0 \\ F_y &= - \int_0^{2\pi} p_\theta \sin \theta a d\theta = -a \int_0^{2\pi} \left\{ p_0 + \frac{1}{2} \rho U^2 (1 - 4 \sin^2 \theta) \right\} \sin \theta d\theta = 0 \end{aligned} \quad (3.44)$$

流れの中に置かれた円柱に生じる流体力が 0 というのは現実の現象にはそぐわない。しかしポテンシャル理論で計算すると 0 になってしまう。この実際との異なる現象をダランベールのパラドックスと言う。このパラドックスは何故生じるかを少し考えてみたい。円柱表面での圧力を無次元化してみよう。上流圧力からの上昇分  $p_\theta - p_0$  を動圧 ( $\frac{1}{2} \rho U^2$ ) で割ったものを圧力係数  $C_p$  と定義すると以下を得る。

$$C_p = \frac{p_\theta - p_0}{\frac{1}{2} \rho U^2} = 1 - 4 \sin^2 \theta \quad (3.45)$$

図 3.11 に円柱表面における圧力係数を示す。横軸が  $\theta$  である。0 ~  $\pi$  のみ示したのは  $\pi \sim 2\pi$  も全く同じであるからである。図から分かるように、上流面 ( $\frac{1}{2}\pi \sim \pi$ ) と下流面 ( $0 \sim \frac{1}{2}\pi$ ) で対称な圧力係数となっている。つまり、上流面で円柱を押す流体力と下流面で円柱を押す流体力が釣り合っている状態となっている。これを積分しても 0 となるのは当たり前と言える。

半径方向流速  $u_r$ , 接線方向流速  $u_\theta$  と速度ポテンシャル  $\Phi$  の関係

半径方向流速  $u_r$ , 接線方向流速  $u_\theta$  と速度ポテンシャルとの関係は

$$u_r = \frac{\partial}{\partial r} \Phi(r, \theta), u_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \Phi(r, \theta) \quad (3.46)$$

で表される。これを導いてみる。  $u_r$ ,  $u_\theta$  は図 3.8 における右下図より以下の関係を得る。また、速度ポテンシャルと  $x$  方向流速  $u$ ,  $y$  方向流速  $v$  との関係を用いると以下を得る。

$$\begin{aligned} u_r &= u \cos \theta + v \sin \theta = \frac{\partial \Phi}{\partial x} \cos \theta + \frac{\partial \Phi}{\partial y} \sin \theta \\ u_\theta &= -u \sin \theta + v \cos \theta = -\frac{\partial \Phi}{\partial x} \sin \theta + \frac{\partial \Phi}{\partial y} \cos \theta \end{aligned} \quad (3.47)$$

chain rule, 及び  $r = \sqrt{x^2 + y^2}, \theta = \arctan(y/x)$  の関係を用いて以下を得る。

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi}{\partial x} &= \frac{\partial \Phi}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial x} = \frac{\partial \Phi}{\partial r} \cos \theta - \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \frac{\sin \theta}{r} \\ \frac{\partial \Phi}{\partial y} &= \frac{\partial \Phi}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial y} + \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial y} = \frac{\partial \Phi}{\partial r} \sin \theta + \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \frac{\cos \theta}{r} \end{aligned} \quad (3.48)$$

(3.48) を (3.47) に代入して整理すると (3.46) の関係が得られる。

### 3.3 一様流中に置かれた平板翼の揚力

揚力の発見は人類の歴史を大きく変えたと言っても過言ではない。飛行機という発明により、人類は空を飛び高速で移動できるようになった。古くからあるヨットやオランダに見られる風車で揚力が使われているように、人類は揚力自体は経験的に使っていた。一方で、揚力の理論的な解釈や、実験による揚力の測定は 20 世紀に入ってからである。

ここでは平板翼の揚力の解析方法について述べる。平板を数式で表わし境界値問題を解くことは難しいので写像を使ってこの問題を解く。

(1) Joukowski 変換

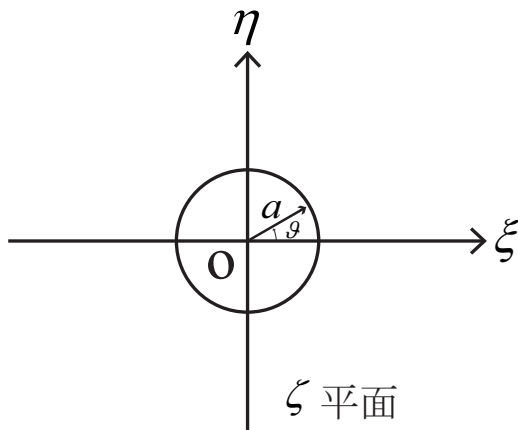


図 3.12:  $\zeta$  平面に置かれた円柱

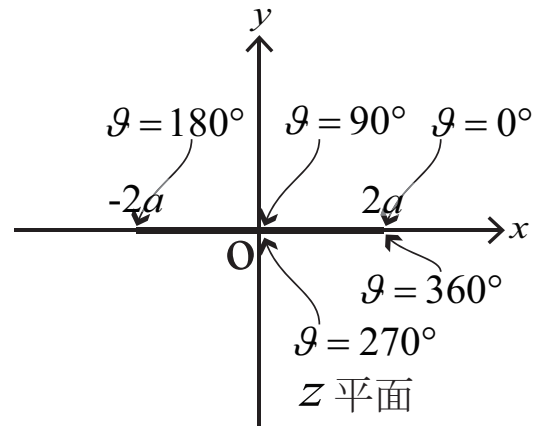


図 3.13:  $z$  平面に写像された平板

$$z = \zeta + \frac{a^2}{\zeta} \quad (3.49)$$

という  $\zeta$  平面から  $z$  平面への写像関数を Joukowski 変換という。図 3.12 に示されるように円が中心  $(0,0)$  に置かれている例を考える。この円は  $\zeta = ae^{i\vartheta}$  と表わされる。(3.49) に代入して  $z = 2a \cos \vartheta$  が得られる。これは実部のみ残っ



ていることが分かる．図 3.13 に示される様に，例えば  $\zeta$  平面の円上の  $\vartheta = 0^\circ$  は  $z$  平面において  $(2a, 0)$  に写されることが分かる． $0 \leq \vartheta \leq 360$  であるので  $\zeta$  平面で円であったものが  $z$  平面では長さ  $4a$  の線分 (平板) になることが分かる．

ここでは詳細は示さないが， $\zeta$  平面における円の中心をずらすことにより Joukowski 翼が  $z$  平面に生じることが知られている．

また，幾何学的な写像のみならず流れ場も写像される．例えば  $z$  平面において  $f(z) = Uz$  は流速  $U$  の一様流れを表すわけであるが，平板 (線分) が置かれている場合も迎角が無ければ流れは一様流と同じである． $\zeta$  平面に写像すると  $f(\zeta) = U(\zeta + \frac{a^2}{\zeta})$  となり， $z$  平面で平板周りの一様流れが  $\zeta$  平面において一様流中の円柱周りの流れになっていることが確認される．

## (2) 一様流中の平板周りの流れと Kutta の条件

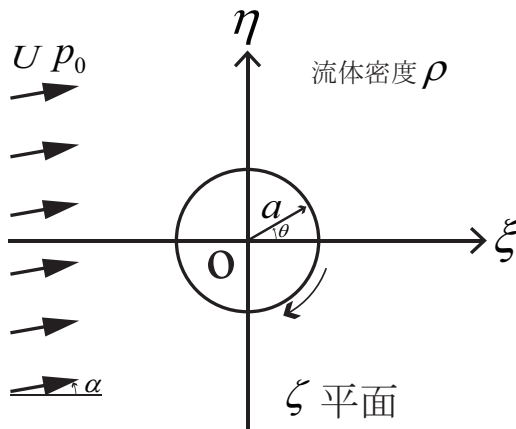


図 3.14: 一様流中の回転円柱 ( $\zeta$  平面)

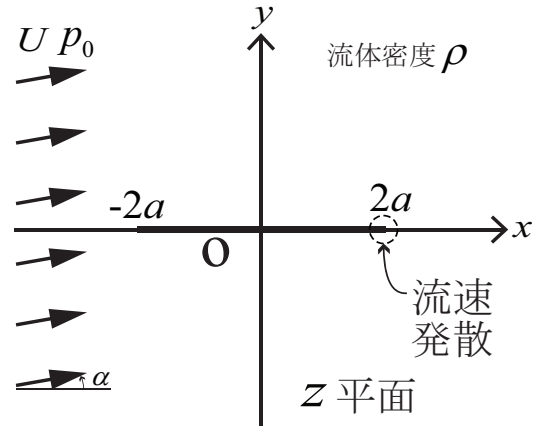


図 3.15: 一様流中の平板 ( $z$  平面)

$\zeta$  平面において

$$f(\zeta) = U \left( e^{-i\alpha} \zeta + \frac{a^2 e^{i\alpha}}{\zeta} \right) + \frac{i\Gamma}{2\pi} \log \zeta \quad (3.50)$$

という流れ場を考える．これは  $\zeta$  平面において図 3.14 に示す様に  $\xi$  軸に対して  $\alpha$  の角度から流入する一様流中に半径  $a$  の回転円柱があり，回転円柱が  $\Gamma$  の循環を作り出している流れの複素速度ポテンシャルである．

これを  $z$  平面に写像することを考えると， $4a$  の平板が迎角  $\alpha$  の一様流中に置かれている流れと言うことになる．しかし，循環  $\Gamma$  は何を意味しているのであろうか．それを考える上で重要となるのが  $z = 2a$  における流速である． $z = 2a$  における複素速度は

$$\left. \frac{df(z)}{dz} \right|_{z=2a} = \left. \frac{df(\zeta)/d\zeta}{dz/d\zeta} \right|_{\zeta=a} = \frac{U(e^{-i\alpha} - a^2 e^{i\alpha}/\zeta^2) + i\Gamma/(2\pi\zeta)}{1 - a^2/\zeta^2} \Big|_{\zeta=a} \quad (3.51)$$

である．分母からも分かるように  $\zeta = a$  即ち翼端において流速が発散することが分かる．これは現実とは乖離がある．(図 3.15) これを解消するために分子の値が 0 となるように  $\Gamma$  の値を定める．これを Kutta の条件と言う．

$$\Gamma = 4\pi a U \sin \alpha \quad (3.52)$$

である時に分子の値が 0 となる．このように  $\Gamma$  を決めることにより (3.51) は  $0/0$  の不定形となる．実際に翼端の流速はロピタルの定理により以下のように計算することが出来る．

$$\left. \frac{df(z)}{dz} \right|_{z=2a} = \lim_{\zeta \rightarrow a} \frac{2Ua^2 e^{i\alpha}/\zeta^3 - i\Gamma/(2\pi\zeta^2)}{2a^2/\zeta^3} = U \cos \alpha \quad (3.53)$$

即ち，翼端で  $U \cos \alpha$  となり，これは一様流の  $x$  方向流速に等しい．Kutta の条件を課すことで翼端で理にかなった結果を得られることとなる．実際の実験においても翼端で流体は接して離れる現象が見られる．ところで循環を加えた

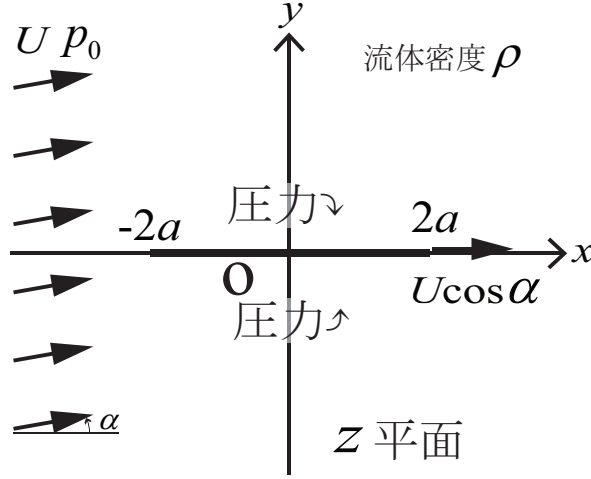


図 3.16: Kutta の条件を課した後の翼端の状況

(3.50) のモデルは一体何を意味していたのであろうか．それは翼上面と翼下面の流速差を表していたことになる．図 3.16 に示される様に翼上面では一様流と反時計回りの循環により流速が上がり結果として Bernoulli の定理より圧力が小さくなり，翼下面では流速が下がり圧力が大きくなることとなる．この圧力差が揚力を生み出したこととなる．

### (3) 揚力計算

複素速度ポテンシャルが得られたので，翼に生じる風荷重を計算してみよう．本来は物体表面圧力を積分し求めることも可能かもしれないが，(2.73) において示された Blasius の公式により物体を取り囲む任意の閉曲線の周回積分により求めることが可能である．即ち

$$F_x - iF_y = \frac{i\rho}{2} \oint_C \left( \frac{df}{d\zeta} \right)^2 \frac{d\zeta}{dz} \quad (3.54)$$

であり， $df(\zeta)/d\zeta$  及び  $dz/d\zeta$  の計算結果を代入し

$$F_x - iF_y = \frac{i\rho}{2} \oint_C \frac{\{U(e^{-i\alpha} - a^2 e^{i\alpha}/\zeta^2) + i\Gamma/(2\pi\zeta)\}^2}{1 - a^2/\zeta^2} d\zeta \quad (3.55)$$

となる．これを計算して，

$$F_x - iF_y \approx \frac{i\rho}{2} \oint_C \{U(e^{-i\alpha} - a^2 e^{i\alpha}/\zeta^2) + i\Gamma/(2\pi\zeta)\}^2 (1 + a^2/\zeta^2 + \dots) d\zeta \quad (3.56)$$

となる．ここで，無限等比級数の和の公式を用いている．留数定理より  $1/\zeta$  の項のみ残ることは明らかである．以上より

$$F_x - iF_y \approx \frac{i\rho}{2} \oint_C \frac{i\Gamma}{\pi} U e^{-i\alpha} \frac{1}{\zeta} d\zeta = \frac{-\rho U e^{-i\alpha} \Gamma}{2\pi} \times 2\pi i \text{Res}\left[\frac{1}{\zeta}, 0\right] = -i\rho U \Gamma e^{-i\alpha} \quad (3.57)$$

$$F_x = -\rho U \Gamma \sin \alpha, \quad F_y = \rho U \Gamma \cos \alpha \quad (3.58)$$

となる．流れに垂直な成分を  $L$ ，流れに水平な成分を  $D$  とすれば

$$L = \rho U \Gamma, \quad D = 0 \quad (3.59)$$

となる．この流れに垂直な成分  $L$  を揚力，水平な成分  $D$  を抗力と言う．摩擦等の成分を考慮していない為に抗力は 0 となっているが，循環を考えたことで揚力が理論的に得られたことになる．揚力は先ほど得られた循環  $\Gamma$  より

$$L = 4\pi\rho a U^2 \sin \alpha \quad (3.60)$$

となる．流れによる力是一般的に代表する速度  $U$  の 2 乗，代表する断面積  $S$ ，流体密度  $\rho$  に比例する．これで無次元化した  $C_L$ ， $C_D$  は

$$C_L = \frac{L}{\frac{1}{2}\rho S U^2} = 2\pi\alpha, \quad C_D = \frac{D}{\frac{1}{2}\rho S U^2} \quad (3.61)$$

を得る．代表面積  $S$  は翼弦長  $4a$ ，翼幅 1 として  $S = 4a$  とした．また， $\alpha$  は小さい為， $\sin \alpha \approx \alpha$  とした．

## 第 4 章

# 波

海洋工学と他の工学分野との流体力学的な大きな違いは自由表面を扱うことにあるだろう。物体表面とは大きく異なり、海面は自由に変化することは容易に想像がつく。本章では最初に自由表面をどのような条件で表すかについて考える。また、波は理想流体として扱うことが多く、本章でも速度ポテンシャルを用いて自由表面条件を導出する。更には、速度ポテンシャルの支配方程式である Laplace の式、及び境界条件を解くことにより波の速度ポテンシャルを導出してみたい。

### 4.1 境界条件

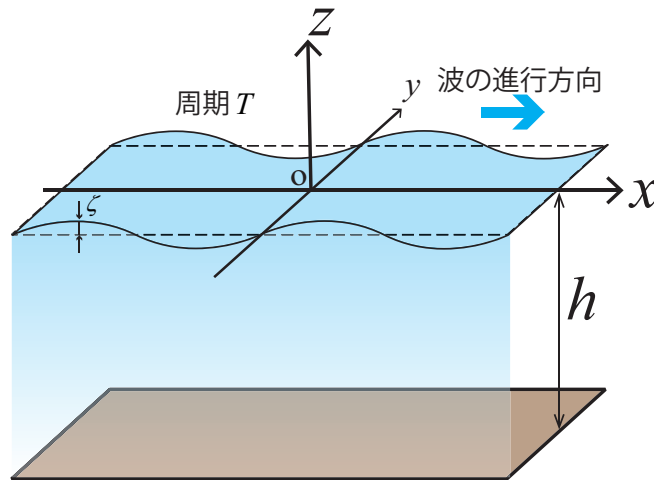


図 4.1: 規則波

図 4.1 に示す様に水深  $h$  に波の振幅  $\zeta$ 、波の周期  $T$  の規則波が  $x$  軸正方向に進行しているとする。波だけの問題を考える時、一般的には 2 つの境界条件を考える必要がある。1 つが自由表面の条件であり、もう 1 つが水底の条件である。最初に自由表面条件について考える。

2.2 節 (2.13) に示される様に自由表面の境界面の形状を  $F(\mathbf{x}, t) = 0$  として

$$\frac{\partial F}{\partial t} + u \frac{\partial F}{\partial x} + v \frac{\partial F}{\partial y} + w \frac{\partial F}{\partial z} = 0 \quad (4.1)$$

で表される。波形を  $z = Z(x, y, t)$  とすれば  $F(\mathbf{x}, t) = z - Z(x, y, t) = 0$  となるので、

$$\frac{\partial}{\partial t} (z - Z) + \frac{\partial \Phi}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x} (z - Z) + \frac{\partial \Phi}{\partial y} \frac{\partial}{\partial y} (z - Z) + \frac{\partial \Phi}{\partial z} \frac{\partial}{\partial z} (z - Z) = 0 \quad (4.2)$$

を得る．これを変形して，

$$\frac{\partial Z}{\partial t} + \frac{\partial \Phi}{\partial x} \frac{\partial Z}{\partial x} + \frac{\partial \Phi}{\partial y} \frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial \Phi}{\partial z} = 0 \quad (4.3)$$

が得られる．これを自由表面における運動学的条件と呼ぶ．この条件は2次の項があるため，一般の解析法では解くことが出来ない．そこで，微小振幅波の仮定を引く．2次の項 (例えば  $\frac{\partial \Phi}{\partial x} \frac{\partial Z}{\partial x}$ ) を省略し，また  $z = 0$  での条件に置き換える．以上より以下を得る．

$$\frac{\partial Z}{\partial t} = \frac{\partial \Phi}{\partial z} \quad (4.4)$$

これは線形化された自由表面における運動学的条件と呼ばれる．

次に，自由表面上における Bernoulli の定理は (2.57) より

$$\rho \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{1}{2} \rho \left\{ \left( \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial \Phi}{\partial z} \right)^2 \right\} + p_a + \rho g Z = 0 \quad (4.5)$$

となる．今，大気圧  $p_a$  を基準に考える．即ち  $p_a = 0$  とする．ここでも微小振幅波の仮定より，2次の項を省略し，また， $z = 0$  での条件に置き換え，

$$\rho \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \rho g Z = 0 \quad (4.6)$$

を得る．これを圧力の条件と言う．(4.6) を (4.4) に代入して整理して

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} + g \frac{\partial \Phi}{\partial z} = 0 \quad (4.7)$$

となる．これが微小振幅波における自由表面の条件である．

次に水底の条件を考える．図より水底の法線は  $\mathbf{n} = (0, 0, 1)$  である．2.2 節 (2.10) より

$$\left( \frac{\partial \Phi}{\partial x}, \frac{\partial \Phi}{\partial y}, \frac{\partial \Phi}{\partial z} \right) \cdot (0, 0, 1) = 0 \quad (4.8)$$

となる．よって， $z = -h$  において

$$\frac{\partial \Phi}{\partial z} = 0 \quad (4.9)$$

が得られる．これを水底の条件と言う．

## 4.2 微小振幅波の速度ポテンシャル

図 4.1 の波において規則波の角周波数  $\omega$  は  $\omega = 2\pi/T$  である．また，波の振幅を  $\zeta$  とする． $x$  軸に沿った波ということで，この場合の流場の速度ポテンシャルを  $\Phi(x, z, t)$  と表し，

$$\Phi(x, z, t) = \Re \{ \phi(x, z) e^{i\omega t} \} \quad (4.10)$$

の様に，時間項を分離して考える．また，速度ポテンシャルは Laplace の式

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = 0 \quad (4.11)$$

を満たす．また，境界条件は前節より

$$\begin{aligned} -\omega^2 \phi + g \frac{\partial \phi}{\partial z} &= 0 & (z = 0) \\ \frac{\partial \phi}{\partial z} &= 0 & (z = -h) \end{aligned} \quad (4.12)$$

となる．この境界値問題を解くことで規則波の速度ポテンシャルが求められる．変数分離法により求める．即ち

$$\phi = X(x)Z(z) \quad (4.13)$$

と置けば、これを (4.11) に代入して

$$-\frac{X''}{X} = \frac{Z''}{Z} = k^2 \quad (4.14)$$

となる。ここで  $k$  は分離定数である。ここから以下の常微分方程式を得る。

$$\begin{aligned} X''(x) + k^2 X(x) &= 0 \\ Z''(z) - k^2 Z(z) &= 0 \end{aligned} \quad (4.15)$$

これらの常微分方程式の一般解は

$$\begin{aligned} X(x) &= Ae^{ikx} + Be^{-ikx} \\ Z(z) &= Ce^{kz} + De^{-kz} \end{aligned} \quad (4.16)$$

である。 $A, B, C, D$  は境界条件によって決まる定数である。図 4.1 の様な  $x$  方向への進行波を表すのは  $e^{-ikx}$  となる。

(4.12) に示された水底の条件より

$$\left. \frac{\partial \phi}{\partial z} \right|_{z=-h} = X(x) \left. \frac{dZ}{dz} \right|_{z=-h} = kX(x) (Ce^{-kh} - De^{kh}) = 0 \quad (4.17)$$

であるから

$$Ce^{-kh} = De^{kh} \quad (4.18)$$

を得る。これより  $Z(z)$  は

$$Z(z) = Ce^{-kh} \left\{ e^{k(z+h)} + e^{-k(z+h)} \right\} = 2Ce^{-kh} \cosh k(z+h) \quad (4.19)$$

となる。求められた  $Z(z)$  と  $X(x)$  を (4.13) と (4.10) に戻して

$$\Phi(x, z, t) = \Re \left\{ 2BCe^{-kh} \cosh k(z+h) e^{-ikx} e^{i\omega t} \right\} \quad (4.20)$$

となる。(4.6) より波形  $Z(x, t)$  は

$$Z(x, t) = -\frac{1}{g} \frac{\partial \Phi}{\partial t} \Big|_{z=0} \quad (4.21)$$

と表わされるので、(4.20) を代入して

$$Z(x, t) = -\frac{1}{g} \Re \left\{ 2BC(i\omega) e^{-ikx} e^{-kh} \cosh kh e^{i\omega t} \right\} \quad (4.22)$$

となる。規則波の振幅は  $\zeta$  なので、係数  $B$  及び  $C$  は結局

$$B \times C = -\frac{g\zeta}{2\omega e^{-kh} \cosh kh} \quad (4.23)$$

となる。以上より、波の速度ポテンシャルは

$$\Phi(x, z, t) = \Re \left\{ -\frac{g\zeta}{\omega} \frac{\cosh k(z+h)}{\cosh kh} e^{i(\omega t - kx)} \right\} \quad (4.24)$$

で表される。また、(4.20) の時間の項  $e^{i\omega t}$  を除いた部分が  $\phi$  であるので、これを自由表面の条件 (4.12) に代入すると以下の式を得る。

$$\frac{\omega^2}{g} = k \tanh kh \quad (4.25)$$

これを波の分散関係式と言う。

## 第 5 章

# 波浪中の浮体運動解析

### 5.1 速度ポテンシャルと浮体運動の関係

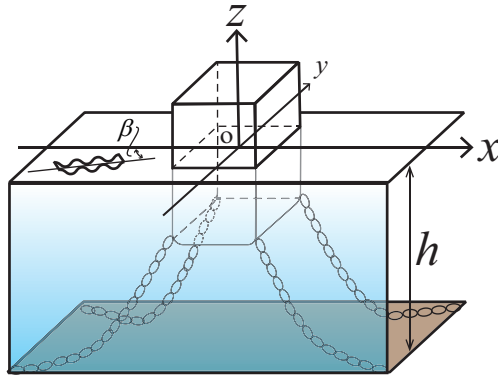


図 5.1: 波浪中の浮体

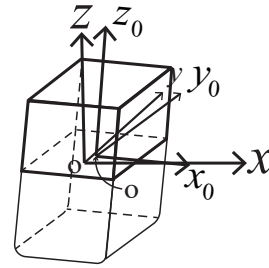


図 5.2: 空間固定および物体固定座標系

入射波振幅  $\zeta$ , 波周期  $T$  (角振動数  $\omega$ ), 波向き  $\beta$  の波浪中に係留された浮体がある問題を考える (図 5.1 参照). 浮体の水平変位を  $\mathbf{X}_T = (\Re(\xi_1 e^{i\omega t}), \Re(\xi_2 e^{i\omega t}), \Re(\xi_3 e^{i\omega t}))$ , 水線面中心の回転変位を  $\mathbf{X}_R = (\Re(\xi_4 e^{i\omega t}), \Re(\xi_5 e^{i\omega t}), \Re(\xi_6 e^{i\omega t}))$  とする.  $j = 1$  が surge,  $j = 2$  が sway,  $j = 3$  が heave,  $j = 4$  が roll,  $j = 5$  が pitch,  $j = 6$  が yaw を意味している. また,  $\xi_j$  は浮体の  $j$  方向の複素運動振幅を意味している. 座標系  $o - xyz$  は空間固定座標系である.

浮体が波浪中を動揺している時, 浮体の運動振幅  $\xi_j$  や入射波振幅  $\zeta$  に速度ポテンシャルは比例すると仮定すれば流場の速度ポテンシャルは以下のように規格化された速度ポテンシャル  $\phi_j$  や  $\phi_D$  を用いて

$$\Phi(\mathbf{x}, t) = \Re \left\{ \left( \sum_{j=1}^6 \xi_j \phi_j(\mathbf{x}) + \zeta \phi_D(\mathbf{x}) \right) e^{i\omega t} \right\} \quad (5.1)$$

と表わされる. 当然ながら流場の速度ポテンシャル  $\Phi(\mathbf{x}, t)$  は Laplace の式を満足する為,  $\phi_j$  や  $\phi_D$  はやはり以下の Laplace の式を満足する.

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \phi_D}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi_D}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi_D}{\partial z^2} &= 0 \\ \frac{\partial^2 \phi_j}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi_j}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi_j}{\partial z^2} &= 0 \end{aligned} \quad (5.2)$$

次に物体表面条件について考えてみたい. (2.9) 式に示される

$$\{\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) - \mathbf{u}'(\mathbf{x}, t)\} \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}) = 0 \quad (5.3)$$

が物体表面条件である. このことから物体表面上での流速  $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$  と物体表面任意位置での速度  $\mathbf{u}'(\mathbf{x}, t)$  を示す必要がある. 物体表面上での流体流速  $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$  は

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \nabla \Phi(\mathbf{x}, t) \quad (5.4)$$

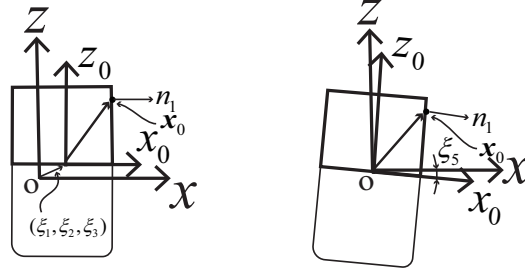


図 5.3: 位置ベクトルの関係

であり,  $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x})$  は

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{n} = \frac{\partial \Phi}{\partial n} \quad (5.5)$$

となる. 次に (5.3) における  $\mathbf{u}'(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x})$  を示す. 浮体の運動と浮体上任意の点の位置ベクトル  $\mathbf{x}$  を関係付けてみたい. 図 5.2 に示す様に  $\mathbf{x}_0$  を物体固定座標系の位置ベクトルとして, 空間固定座標系における位置ベクトル  $\mathbf{x}$  との関係は図 5.3 に示される関係を参考にして

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + \mathbf{X}_T(t) + \mathbf{X}_R(t) \times \mathbf{x}_0 \quad (5.6)$$

で表される.  $\mathbf{X}_R(t) \times \mathbf{x}_0$  については少し分かりにくいところもあるので, p.37 に解説を示す. これを時間微分して浮体表面における速度  $\mathbf{u}'(\mathbf{x}, t)$  は

$$\mathbf{u}'(\mathbf{x}, t) = \dot{\mathbf{X}}_T(t) + \dot{\mathbf{X}}_R(t) \times \mathbf{x}_0 \quad (5.7)$$

となる. 従って, (5.3) の  $\mathbf{u}'(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{n}$  は以下ようになる.

$$\mathbf{u}'(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{n} = \dot{\mathbf{X}}_T(t) \cdot \mathbf{n} + \dot{\mathbf{X}}_R(t) \cdot (\mathbf{x}_0 \times \mathbf{n}) \quad (5.8)$$

浮体は角振動数  $\omega$  の周期運動であることに注意し, (5.1) で示される様に速度ポテンシャルは各運動成分に分解出来るので, 6 自由度運動に関わる物体表面条件として以下を得る.

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi_j}{\partial n} &= i\omega n_j & (j = 1, 2, 3) \\ \frac{\partial \phi_j}{\partial n} &= i\omega (\mathbf{x}_0 \times \mathbf{n})_{j-3} & (j = 4, 5, 6) \end{aligned} \quad (5.9)$$

(5.9) の各運動モードの境界値問題を radiation 問題と呼ぶ. また, この  $\phi_j$  のことを radiation ポテンシャルと言う.  $\phi_D$  については

$$\frac{\partial \phi_D}{\partial n} = 0 \quad (5.10)$$

となる. この  $\phi_D$  の境界値問題を diffraction 問題と言い,  $\phi_D$  のことを diffraction ポテンシャルと言う. この diffraction ポテンシャルには入射波の速度ポテンシャル  $\phi_0$  と反射波の速度ポテンシャルが入っていると言える. 反射波の速度ポテンシャルを  $\phi_7$  として

$$\phi_D = \phi_0 + \phi_7 \quad (5.11)$$

である. よって,

$$\frac{\partial \phi_7}{\partial n} = -\frac{\partial \phi_0}{\partial n} \quad (5.12)$$

が実際に解くべき物体表面上における境界条件となる.

残る境界条件は自由表面条件及び水底条件である. 自由表面条件は全ての速度ポテンシャルが (4.7) で示した

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} + g \frac{\partial \Phi}{\partial z} = 0 \quad (5.13)$$



を満たす必要があるので、各速度ポテンシャル  $\phi_j$  は  $z = 0$  において

$$-\omega^2 \phi_j + g \frac{\partial \phi_j}{\partial z} = 0 \quad (j = 1 \sim 7) \quad (5.14)$$

を満たす必要がある。

最後の境界条件となる水底条件については、既に (4.9) で示した通り

$$\frac{\partial \Phi}{\partial z} = 0 \quad (5.15)$$

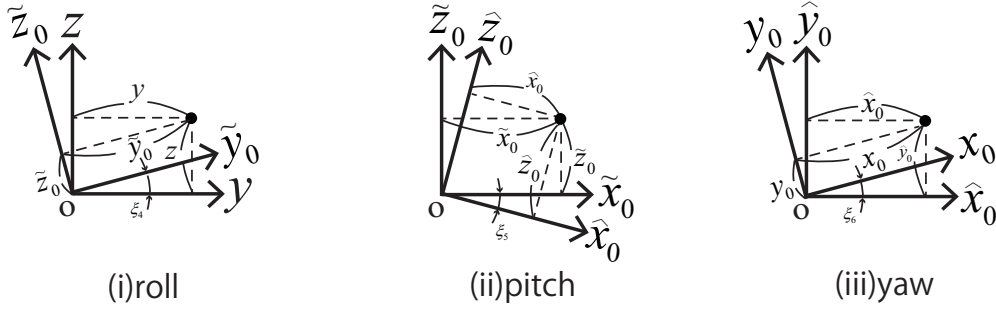
である。従って  $\phi_j (j = 1 \sim 7)$  は  $z = -h$  において以下を満足する必要がある。

$$\frac{\partial \phi_j}{\partial z} = 0 \quad (j = 1 \sim 7) \quad (5.16)$$

尚、入射波ポテンシャルは既にこの条件を満足している。

以上が速度ポテンシャルの支配方程式及び境界条件である。

回転運動する浮体固定座標系と空間固定座標系との関係



回転運動による浮体固定座標系と空間固定座標系との関係は、図に示す様に (i)roll→(ii)pitch→(iii)yaw の順番に回転させて考えると良い。図 (i) に示す様に、 $x$  軸周りに回転運動したとする。その際の回転角を  $\xi_4$  とする。回転後の船体固定座標系の  $\hat{x}_0$  と空間固定座標系の  $x$  との関係は

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \xi_4 & -\sin \xi_4 \\ 0 & \sin \xi_4 & \cos \xi_4 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \hat{x}_0 \\ \hat{y}_0 \\ \hat{z}_0 \end{pmatrix} \quad (5.17)$$

となる。その後、(ii) の様に  $\hat{x}_0$  において  $\hat{y}_0$  軸周りに回転角  $\xi_5$  で回転し、 $\hat{x}_0$  になったとする。この際は以下の関係式を得る。

$$\begin{pmatrix} \hat{x}_0 \\ \hat{y}_0 \\ \hat{z}_0 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \xi_5 & 0 & \sin \xi_5 \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \xi_5 & 0 & \cos \xi_5 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \hat{x}_0 \\ \hat{y}_0 \\ \hat{z}_0 \end{pmatrix} \quad (5.18)$$

最後に、(iii) の様に  $\hat{x}_0$  において  $\hat{z}_0$  軸周りに回転角  $\xi_6$  で回転し、 $x_0$  になったとする。この際は以下の関係式を得る。

$$\begin{pmatrix} \hat{x}_0 \\ \hat{y}_0 \\ \hat{z}_0 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \xi_6 & -\sin \xi_6 & 0 \\ \sin \xi_6 & \cos \xi_6 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} \quad (5.19)$$

よって、空間固定座標系である  $x$  と物体固定座標系である  $x_0$  の関係は

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \xi_5 \cos \xi_6 & -\cos \xi_5 \sin \xi_6 & \sin \xi_5 \\ \cos \xi_4 \sin \xi_6 + \sin \xi_4 \sin \xi_5 \cos \xi_6 & \cos \xi_4 \cos \xi_6 - \sin \xi_4 \sin \xi_5 \sin \xi_6 & -\sin \xi_4 \cos \xi_5 \\ \sin \xi_4 \sin \xi_6 - \cos \xi_4 \sin \xi_5 \cos \xi_6 & \cos \xi_4 \sin \xi_5 \sin \xi_6 + \sin \xi_4 \cos \xi_6 & \cos \xi_4 \cos \xi_5 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} \quad (5.20)$$

となる。今、

$$[R]^{-1} = \begin{bmatrix} \cos \xi_5 \cos \xi_6 & -\cos \xi_5 \sin \xi_6 & \sin \xi_5 \\ \cos \xi_4 \sin \xi_6 + \sin \xi_4 \sin \xi_5 \cos \xi_6 & \cos \xi_4 \cos \xi_6 - \sin \xi_4 \sin \xi_5 \sin \xi_6 & -\sin \xi_4 \cos \xi_5 \\ \sin \xi_4 \sin \xi_6 - \cos \xi_4 \sin \xi_5 \cos \xi_6 & \cos \xi_4 \sin \xi_5 \sin \xi_6 + \sin \xi_4 \cos \xi_6 & \cos \xi_4 \cos \xi_5 \end{bmatrix} \quad (5.21)$$

とする。この  $[R]$  のことを回転行列と言い、空間座標系と回転運動した物体固定座標系とを結びつける関係を求めることが出来る。また、Taylor 展開して 1 次の項のみ考えれば以下を得る。

$$[R]^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -\xi_6 & \xi_5 \\ \xi_6 & 1 & -\xi_4 \\ -\xi_5 & \xi_4 & 1 \end{bmatrix} \quad (5.22)$$

結局、

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -\xi_6 & \xi_5 \\ \xi_6 & 1 & -\xi_4 \\ -\xi_5 & \xi_4 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} = (\xi_4, \xi_5, \xi_6) \times (x_0, y_0, z_0) \quad (5.23)$$

となる。今、回転運動変位を  $\mathbf{X}_R = (\xi_4, \xi_5, \xi_6)$  とすれば

$$\mathbf{x} = \mathbf{X}_R \times \mathbf{x}_0 \quad (5.24)$$

という関係式を得る。

## 5.2 浮体に生じる流体による力とモーメント

前節では diffraction ポテンシャルや radiation ポテンシャルの支配方程式、及び境界条件について示した。浮体形状は任意形状であることがほとんどであり、この際の境界値問題の代表的な解法として境界要素法等で解かれることが多い。本節では diffraction, radiation ポテンシャルが既に求まったとして、浮体に生じる力やモーメントについて述べていく。

一般化された Bernoulli の定理 (2.57) より、浮体に生じる圧力は2次の高次項を省略し

$$\begin{aligned} p &= -\rho \left( \frac{\partial \Phi}{\partial t} + gz \right) \\ &= -\rho \Re \left\{ \left( \sum_{j=1}^6 \xi_j \phi_j + \zeta (\phi_0 + \phi_7) \right) i\omega e^{i\omega t} \right\} - \rho gz \end{aligned} \quad (5.25)$$

であり、浮体に生じる力  $\mathbf{F}(t)$  及びモーメント  $\mathbf{M}(t)$  は

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \mathbf{F}(t) \\ \mathbf{M}(t) \end{pmatrix} &= -\rho g \iint_{S_B} \begin{pmatrix} \mathbf{n} \\ \mathbf{x} \times \mathbf{n} \end{pmatrix} z ds \\ &\quad - \rho \Re \left\{ \sum_{j=1}^6 i\omega \xi_j e^{i\omega t} \iint_{S_B} \begin{pmatrix} \mathbf{n} \\ \mathbf{x} \times \mathbf{n} \end{pmatrix} \phi_j ds \right\} \\ &\quad - \rho \Re \left\{ i\omega \zeta e^{i\omega t} \iint_{S_B} \begin{pmatrix} \mathbf{n} \\ \mathbf{x} \times \mathbf{n} \end{pmatrix} (\phi_0 + \phi_7) ds \right\} \end{aligned} \quad (5.26)$$

となる。ここからも分かるように、流体から浮体に加わる力やモーメントは3つの成分に分けられる。1つは浮体の運動に伴う静圧力に関わる力やモーメント、もう一つは浮体運動によって生じる反力やモーメント、最後は入射波及び反射波によって生じる力やモーメントである。

### 5.2.1 浮体静力学

浮体の安定性を考える時、沈まない、ひっくり返らないという観点が最も重要であることは言うまでもなく、浮体静力学はこれを教えてくれる。(5.26)の右辺第1項は静水圧による成分であり浮体の形状によって決まる。静水圧による力はアルキメデスの原理として有名であり、横傾斜時の安定性は GM という概念として海洋工学の最初に習う。

最初に静水圧による力を考える。

$$\mathbf{F}(t) = -\rho g \iint_{S_B} \mathbf{n} z ds \quad (5.27)$$

において、Gauss の発散定理を用いて、上式は

$$\mathbf{F}(t) = \rho g \iiint_{V_B} (\nabla z) dV = \mathbf{k} \rho g \iiint_{V_B} dV \quad (5.28)$$

となる。

ここで、浮体は運動しているので  $V_B$  は元々の体積  $V_0$  に加えて浮体が運動することによって変化する体積  $V'_0$  を考慮しなくてはならない。浮体運動により水圧変化が生じるからである。例えば  $X_3$  の Heave 運動をしたとすると  $x = x_0$  の位置において  $-\rho g X_3$  分の水圧減少が生じる。元の位置と運動後の位置との差は  $z - z_0$  で評価されるので、水圧差として  $-\rho g(z - z_0)$  である。 $z - z_0$  は (5.6) の関係を用いて表すことが出来、 $z - z_0 = X_3 + X_4 y_0 - X_5 x_0$  で評価される。これを  $x_0$  方向、 $y_0$  方向に渡って積分すると heave 運動に加えて pitch 運動及び roll 運動による力を求めることが出来る。よって、(5.28) は

$$\begin{aligned} \mathbf{F}(t) &= \mathbf{k} \rho g \left\{ \iiint_{V_0} dV - \iint_{S_0} (X_3 + X_4 y_0 - X_5 x_0) dx_0 dy_0 \right\} \\ &= \mathbf{k} \rho g (V_0 - X_3 S_0 - X_4 S_2 + X_5 S_1) \end{aligned} \quad (5.29)$$

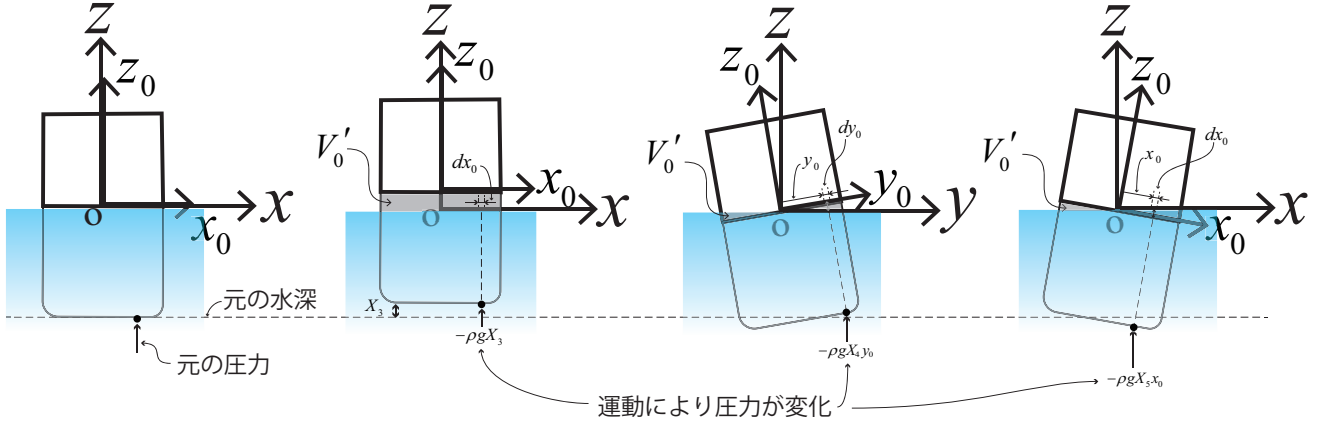


図 5.4: 位置ベクトルの関係

となる．ここで  $S_0$  は浮体の水線面積である．

ここで，

$$\begin{aligned} S_1 &= \iint_{S_0} x_0 ds \\ S_2 &= \iint_{S_0} y_0 ds \end{aligned} \quad (5.30)$$

であり，面積 1 次モーメントと呼ばれている．水線面中心に原点を置けばこれらの値は 0 となる．

次にモーメントについて考える．浮体は surge 運動や sway 運動しているが，モーメントは浮体の水線面中心周りに働くと考えるのが妥当であるので (5.26) の右辺第 1 項の静水圧による成分を平行移動して

$$\mathbf{M}(t) = -\rho g \iint_{S_B} \{(\mathbf{x} - \mathbf{X}_T) \times \mathbf{n}\} z ds \quad (5.31)$$

で評価される．(5.31) について， $\mathbf{x} - \mathbf{X}_T = (A_1, A_2, A_3)$ ， $\mathbf{n} = (n_x, n_y, n_z)$  として

$$\begin{aligned} \mathbf{M}(t) &= -\rho g \iint_{S_B} \{i z (A_2 n_z - A_3 n_y) + j z (A_3 n_x - A_1 n_z) + k z (A_1 n_y - A_2 n_x)\} ds \\ &= \rho g \iiint_{V_B} \left[ i \left\{ \frac{\partial}{\partial z} (z A_2) - \frac{\partial}{\partial y} (z A_3) \right\} + j \left\{ \frac{\partial}{\partial x} (z A_3) - \frac{\partial}{\partial z} (z A_1) \right\} + k \left\{ \frac{\partial}{\partial y} (z A_1) - \frac{\partial}{\partial x} (z A_2) \right\} \right] \end{aligned} \quad (5.32)$$

であるから

$$\mathbf{M}(t) = \rho g \iiint_{V_B} \{i (y - X_2) - j (x - X_1)\} dV \quad (5.33)$$

となる．(5.32) の 2 式目から 3 式目への式変形は Gauss の発散定理を用いている．

先に roll 方向のモーメント  $M_1$  について考えてみたい．

$$M_1(t) = \rho g \iiint_{V_B} (y - X_2) dV \quad (5.34)$$

先程の力の時と同様に浮体は運動しているので  $V_0$  に加えて  $V'$  を考える．運動している時は，(5.6) の関係を用いて  $y - X_2 = y_0 + X_6 x_0 - X_4 z_0$  と評価されるので，

$$M_1(t) = \rho g \left\{ \iiint_{V_0} (y_0 + X_6 x_0 - X_4 z_0) dV - \iint_{S_0} (y_0 + X_6 x_0 - X_4 z_0) (X_3 + X_4 y_0 - X_5 x_0) dx_0 dy_0 \right\} \quad (5.35)$$

を得る． $X_6 X_3$  のような 2 次の項は微小であるので以下のようになる．

$$M_1(t) = \rho g \left\{ \iiint_{V_0} (y_0 + X_6 x_0 - X_4 z_0) dV - \iint_{S_0} (X_3 y_0 + X_4 y_0^2 - X_5 x_0 y_0) dx_0 dy_0 \right\} \quad (5.36)$$

次に pitch 方向のモーメント  $M_2$  について考えてみたい。(5.33) より,  $M_2$  は

$$M_2(t) = -\rho g \iiint_{V_B} (x - X_1) dV \quad (5.37)$$

である. Pitch 運動時に生じるモーメントも roll 時と同じ考え方で  $x - X_1 = x_0 + X_5 z_0 - X_6 y_0$  であるので

$$M_2(t) = -\rho g \left\{ \iiint_{V_B} (x_0 + X_5 z_0 - X_6 y_0) dV - \iint_{S_0} (x_0 + X_5 z_0 - X_6 y_0) (X_3 + X_4 y_0 - X_5 x_0) dx_0 dy_0 \right\} \quad (5.38)$$

となる. roll の時と同様に  $X_6 X_3$  のような 2 次の項を無視し

$$M_2(t) = -\rho g \left\{ \iiint_{V_0} (x_0 + X_5 z_0 - X_6 y_0) dV - \iint_{S_0} (X_3 x_0 + X_4 x_0 y_0 - X_5 x_0^2) dx_0 dy_0 \right\} \quad (5.39)$$

となる.

ここで,

$$\mathbf{x}_B = \frac{1}{V_0} \iiint_{V_0} \mathbf{x}_0 dV \quad (5.40)$$

$$S_{12} = \iint_{S_0} x_0 y_0 dS$$

$$S_{11} = \iint_{S_0} x_0^2 dS \quad (5.41)$$

$$S_{22} = \iint_{S_0} y_0^2 dS$$

と定義すれば,

$$\begin{aligned} \mathbf{M}(t) = & i\rho g \{V_0 (y_B + X_6 x_B - X_4 z_B) - X_3 S_2 - X_4 S_{22} + X_5 S_{12}\} \\ & - j\rho g \{V_0 (x_B + X_5 z_B - X_6 y_B) - X_3 S_1 - X_4 S_{12} + X_5 S_{11}\} \end{aligned} \quad (5.42)$$

が得られる. ここで,  $\mathbf{x}_B$  は浮心,  $S_{11}$  及び  $S_{22}$  は水線面 2 次モーメント,  $S_{12}$  は水線面乗積モーメントと呼ばれる. 水線面乗積モーメントは原点が水線面中心であれば 0 となるが, 水線面 2 次モーメントは 2 乗であるので 0 とはならない.

次に, 浮体に生じる重力による力  $\mathbf{F}_G$ , モーメント  $\mathbf{M}_G$  について考える. 重力による力は

$$\mathbf{F}_G = -mg\mathbf{k} \quad (5.43)$$

である. モーメント  $\mathbf{M}_G$  については重心が以下のように移動するわけであるから腕の長さは

$$\mathbf{x}_G + \mathbf{X}_R \times \mathbf{x}_G \quad (5.44)$$

となる. よって,

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_G &= (\mathbf{x}_G + \mathbf{X}_R \times \mathbf{x}_G) \times (-mg\mathbf{k}) \\ &= -(y_G + X_6 x_G - X_4 z_G) mg\mathbf{i} + (x_G + X_5 z_G - X_6 y_G) mg\mathbf{j} \end{aligned} \quad (5.45)$$

となる.

浮体運動により流体から受ける力やモーメント (5.29), (5.33) 及び重力 (5.43) や重力によるモーメント (5.45) において, これらをまとめて

$$\begin{pmatrix} \mathbf{F}_R \\ \mathbf{M}_R \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c_{33} & c_{34} & c_{35} & 0 \\ 0 & 0 & c_{43} & c_{44} & c_{45} & c_{46} \\ 0 & 0 & c_{53} & c_{54} & c_{55} & c_{56} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ X_4 \\ X_5 \\ X_6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \rho g V_0 y_B \\ -\rho g V_0 x_B \\ 0 \end{pmatrix} \quad (5.46)$$

但し,

$$\begin{aligned}
 c_{33} &= -\rho g S_0, & c_{34} &= -\rho g S_2, & c_{35} &= \rho g S_1 \\
 c_{43} &= -\rho g S_2, & c_{44} &= -\rho g V_0 \left( \frac{S_{22}}{V_0} + z_B - z_G \right), & c_{45} &= \rho g S_{12}, & c_{46} &= \rho g V_0 (x_B - x_G) \\
 c_{53} &= \rho g S_1, & c_{54} &= \rho g S_{12}, & c_{55} &= -\rho g V_0 \left( \frac{S_{11}}{V_0} + z_B - z_G \right), & c_{56} &= \rho g V_0 (y_B - y_G)
 \end{aligned} \tag{5.47}$$

となる．船や海洋構造物は左右対称であるので、 $S_{12} = 0$  となる．釣り合い状態にある浮体の重心位置と浮心位置は同じ  $z$  軸上にある為、 $x_B = x_G$ ,  $y_B = y_G$  である．また、座標原点を水線面積中心に置くと便利であり、そうすると  $S_1 = 0$ ,  $S_2 = 0$ ,  $x_B = 0$ ,  $y_B = 0$  となる．以上より、復原力及び復原モーメントは簡略化されて

$$\begin{pmatrix} \mathbf{F}_R \\ \mathbf{M}_R \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ X_4 \\ X_5 \\ X_6 \end{pmatrix} \tag{5.48}$$

となる．

### 5.2.2 付加質量および造波減衰力

浮体の運動によって波が生じ、その反力として浮体には力が生じる．(5.1) において浮体の運動による速度ポテンシャル、即ち radiation ポテンシャルと、入射波および反射波の速度ポテンシャル、即ち diffraction ポテンシャルとに分けた．Radiation による浮体に生じる力とモーメントは (5.26) の右辺第2項目である．この力とモーメントを  $F_i(t)$ , ( $i = 1, 2, \dots, 6$ ) とする． $i$  が力とモーメントの方向成分を表している．(5.26) の右辺第2項目からも分かるように各運動成分  $\xi_j$  毎に  $i$  方向の力があるわけなので力の振幅を  $f_{ij}$  として以下のように表すことが出来る．

$$F_i(t) = \Re \left\{ \sum_{j=1}^6 \xi_j e^{i\omega t} f_{ij} \right\}, \quad i = 1, 2, \dots, 6 \tag{5.49}$$

また、物体表面上で (5.9) であるから (5.26) と (5.49) より  $f_{ij}$  は以下のように与えられる．

$$f_{ij} = -\rho \iint_{S_B} \frac{\partial \phi_i}{\partial n} \phi_j ds \tag{5.50}$$

さて、 $F_i(t)$  については、速度  $\dot{X}_j = \Re\{i\omega \xi_j e^{i\omega t}\}$  及び加速度  $\ddot{X}_j = \Re\{(i\omega)^2 \xi_j e^{i\omega t}\}$  に比例する力やモーメントがあると考えたと

$$F_i(t) = -\sum_{j=1}^6 \left\{ a_{ij} \ddot{X}_j + b_{ij} \dot{X}_j \right\} = -\Re \left\{ \sum_{j=1}^6 (i\omega)^2 a_{ij} e^{i\omega t} \xi_j + b_{ij} (i\omega) \xi_j e^{i\omega t} \right\} \tag{5.51}$$

とも表されるので (5.49) と (5.51) より

$$f_{ij} = \omega^2 a_{ij} - i\omega b_{ij} \tag{5.52}$$

となる．この  $a_{ij}$  のことを付加質量と呼び、 $b_{ij}$  のことを造波減衰力係数という． $a_{ij}$  及び  $b_{ij}$  の下付き添え字の意味であるが、 $j$  方向の動揺に対する  $i$  方向の付加質量、造波減衰係数という意味である．また、(5.52) の関係からも分かるように、(5.50) で求められた値を実部、虚部に分けることで付加質量、造波減衰係数が算出出来る．

### 5.2.3 波強制力

既に (5.26) で示したように入射波及び反射波によって生じる力やモーメントは

$$\begin{pmatrix} \mathbf{F}(t) \\ \mathbf{M}(t) \end{pmatrix} = -\rho \Re \left\{ i\omega \zeta e^{i\omega t} \iint_{S_B} \begin{pmatrix} \mathbf{n} \\ \mathbf{x} \times \mathbf{n} \end{pmatrix} (\phi_0 + \phi_r) ds \right\} \tag{5.53}$$

与えられる。これを diffraction 力, diffraction モーメントと呼ぶ。本来的には diffraction 問題を解き  $\phi_7$  を求める必要があるが, 反射波成分である  $\phi_7$  を無視して入射波成分  $\phi_0$  だけを物体積分し

$$\begin{pmatrix} \mathbf{F}(t) \\ \mathbf{M}(t) \end{pmatrix} = -\rho \Re \left\{ i\omega \zeta e^{i\omega t} \iint_{S_B} \begin{pmatrix} \mathbf{n} \\ \mathbf{x} \times \mathbf{n} \end{pmatrix} \phi_0 ds \right\} \quad (5.54)$$

として計算することもある。これを Froude-Krylov 力と呼ぶ。

Diffraction 力・モーメントの計算では精度を上げる為に積分方法等を工夫する方法もあるが, ここではその詳細は割愛する。

### 5.3 浮体の慣性

浮体の慣性力について考えてみる。座標系をどのようにするかで運動方程式は変わることは力学で学んだ通りである。浮体運動は空間に固定された座標系  $o-xyz$  と物体固定座標系  $o-x_0y_0z_0$  とする座標系が使われることが多い。浮体の微小体積  $dV$  の速度は  $\dot{\mathbf{X}}_T + \dot{\mathbf{X}}_R \times \mathbf{x}_0$  であり, この微小体積の密度は  $\rho_B$  として, 浮体の慣性力  $\mathbf{F}_{mass}$  は運動量の時間変化であるので

$$\mathbf{F}_{mass} = \frac{d}{dt} \iiint_{V_B} \rho_B \left( \dot{\mathbf{X}}_T + \dot{\mathbf{X}}_R \times \mathbf{x}_0 \right) dV \quad (5.55)$$

となる。次にモーメントについて考えてみる。微小体積の角運動量は  $\rho_B \mathbf{x}_0 \times \left( \dot{\mathbf{X}}_T + \dot{\mathbf{X}}_R \times \mathbf{x}_0 \right) dV$  であるから, 慣性によるモーメントは

$$\mathbf{M}_{mass} = \frac{d}{dt} \iiint_{V_B} \rho_B \mathbf{x}_0 \times \left( \dot{\mathbf{X}}_T + \dot{\mathbf{X}}_R \times \mathbf{x}_0 \right) dV \quad (5.56)$$

となる。

(5.55) について体積は時間変化しないので, 時間微分を積分の中に入れる。また,  $\mathbf{X}_T = (X_1, X_2, X_3)$ ,  $\mathbf{X}_R = (X_4, X_5, X_6)$  として,

$$\mathbf{F}_{mass} = \iiint_{V_B} \rho_B \left( \ddot{X}_1, \ddot{X}_2, \ddot{X}_3 \right) dV + \iiint_{V_B} \rho_B \left( \ddot{X}_5 z_0 - \ddot{X}_6 y_0, \ddot{X}_6 x_0 - \ddot{X}_4 z_0, \ddot{X}_4 y_0 - \ddot{X}_5 x_0 \right) dV \quad (5.57)$$

ここで, 浮体の質量  $m$  や重心  $\mathbf{x}_G$  は以下の様に定義できる。

$$m = \iiint_{V_B} \rho_B dV \quad (5.58)$$

$$\mathbf{x}_G = \frac{1}{m} \iiint_{V_B} \rho_B \mathbf{x}_0 dV \quad (5.59)$$

よって,  $\mathbf{F}_{mass}$  は以下のように表すことが出来る。

$$\mathbf{F}_{mass} = \begin{bmatrix} m & 0 & 0 & 0 & mz_G & -my_G \\ 0 & m & 0 & -mz_G & 0 & mx_G \\ 0 & 0 & m & my_G & -mx_G & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{X}_1 \\ \ddot{X}_2 \\ \ddot{X}_3 \\ \ddot{X}_4 \\ \ddot{X}_5 \\ \ddot{X}_6 \end{pmatrix} \quad (5.60)$$

次に角運動量について式展開してみよう。(5.56) は

$$\mathbf{M}_{mass} = \iiint_{V_B} \rho_B \mathbf{x}_0 \times \left( \ddot{X}_1, \ddot{X}_2, \ddot{X}_3 \right) dV + \iiint_{V_B} \rho_B \mathbf{x}_0 \times \left( \ddot{X}_5 z_0 - \ddot{X}_6 y_0, \ddot{X}_6 x_0 - \ddot{X}_4 z_0, \ddot{X}_4 y_0 - \ddot{X}_5 x_0 \right) dV \quad (5.61)$$

となる。ここで, 浮体の慣性モーメント, 慣性乗積を以下の様に定義する。

$$\begin{aligned} I_{xx} &= \iiint_{V_B} \rho_B (y_0^2 + z_0^2) dV, & I_{xy} &= \iiint_{V_B} \rho_B x_0 y_0 dV, & I_{xz} &= \iiint_{V_B} \rho_B x_0 z_0 dV \\ I_{yx} &= \iiint_{V_B} \rho_B y_0 x_0 dV, & I_{yy} &= \iiint_{V_B} \rho_B (x_0^2 + z_0^2) dV, & I_{yz} &= \iiint_{V_B} \rho_B y_0 z_0 dV \\ I_{zx} &= \iiint_{V_B} \rho_B z_0 x_0 dV, & I_{zy} &= \iiint_{V_B} \rho_B z_0 y_0 dV, & I_{zz} &= \iiint_{V_B} \rho_B (x_0^2 + y_0^2) dV \end{aligned} \quad (5.62)$$

これらを用いて

$$\mathbf{M}_{mass} = \begin{bmatrix} 0 & -mz_G & my_G & I_{xx} & -I_{xy} & -I_{xz} \\ mz_G & 0 & -mx_G & -I_{yx} & -I_{yy} & -I_{zy} \\ -my_G & mx_G & 0 & -I_{zx} & -I_{zy} & I_{zz} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{X}_1 \\ \ddot{X}_2 \\ \ddot{X}_3 \\ \ddot{X}_4 \\ \ddot{X}_5 \\ \ddot{X}_6 \end{pmatrix} \quad (5.63)$$

(5.60) 及び (5.63) 式を纏めると浮体の運動による慣性による力及びモーメントは

$$\begin{pmatrix} \mathbf{F}_{mass} \\ \mathbf{M}_{mass} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} m & 0 & 0 & 0 & mz_G & -my_G \\ 0 & m & 0 & -mz_G & 0 & mx_G \\ 0 & 0 & m & my_G & -mx_G & 0 \\ 0 & -mz_G & my_G & I_{xx} & -I_{xy} & -I_{xz} \\ mz_G & 0 & -mx_G & -I_{yx} & -I_{yy} & -I_{zy} \\ -my_G & mx_G & 0 & -I_{zx} & -I_{zy} & I_{zz} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{X}_1 \\ \ddot{X}_2 \\ \ddot{X}_3 \\ \ddot{X}_4 \\ \ddot{X}_5 \\ \ddot{X}_6 \end{pmatrix} \quad (5.64)$$

となる。尚、運動方程式を解く際にはこの質量マトリックスに付加質量及び付加慣性モーメントを加えて計算する。

## 5.4 係留の理論

浮体の平面運動の復元は係留によって成される。本節では代表的な理論であるカテナリー理論を取り扱う。既に係留には緩係留、緊張係留があると述べた。カテナリー理論は緩係留方式の係留の理論である。扱う事象によって理論や手法はその都度選択する必要がある。例えば緩係留であっても、流体と係留索との動的な連成問題を行う場合には lumped mass 法や有限要素法等が用いられる。カテナリー理論は係留索自体の動的な挙動は扱うことが出来ないが、浮体との連成は取り扱える。自身で係留浮体の運動を解析する際には、数値計算に用いる手法の敷いている仮定をしっかりと理解し選択する必要がある。

図 5.5 に係留問題における座標系を示す。アンカーと浮体側の係留取付位置とを結ぶ水平方向の向きを  $x$ 、鉛直上向きを  $z$ 、係留が海底と接する点を  $o$  とする。カテナリー理論はアンカー位置と係留取付位置で全てが決まる為、このように 2 次元問題の様に取り扱いしても差し支えない。係留索上の任意の点を  $p$  とし、その点における張力を  $T$ 、各方向成

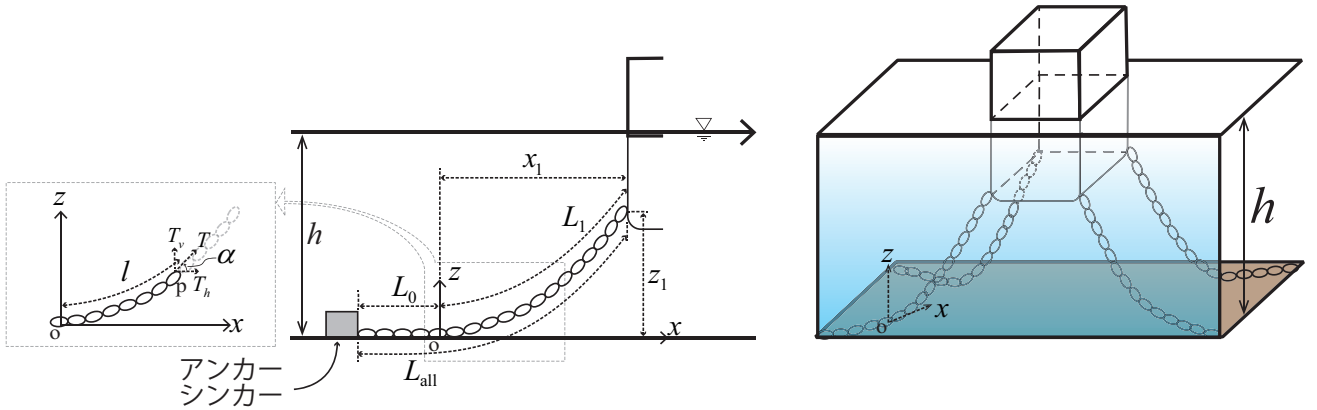


図 5.5: 係留問題の座標系

分を  $T_h$ 、 $T_v$  とする。浮体に生じる  $x$  方向、 $y$  方向の力を  $\mathbf{F}$  として、

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} -T_h \\ -T_v \end{pmatrix} \quad (5.65)$$

となる。係留索の単位長さ当たりの水中質量を  $\rho$  とし、 $op$  間の長さを  $l$  とする。

$$T_h = T \cos \alpha \quad (5.66)$$

$$T_v = \rho gl = T \sin \alpha = T_h \tan \alpha \quad (5.67)$$



$\alpha$  は  $T_h$  と  $T$  との成す角であると同時に、係留索の任意の点での向きを表しており、以下の関係がある。

$$\frac{dz}{dx} = \tan \alpha \quad (5.68)$$

また、 $T_v$  を  $\rho g l$  と表したように  $T_h$  も

$$T_h = \rho g a \quad (5.69)$$

と置く。この  $a$  を等価長さという。また、 $\beta \equiv \tan \alpha$  として、(5.67) より

$$l = a \tan \alpha = a \beta \quad (5.70)$$

と表すことが出来る。係留の幾何学的関係から  $dx/dl = \cos \alpha$  であるから、

$$\frac{dl}{dx} = \frac{1}{\cos \alpha} = \sqrt{1 + \tan^2 \alpha} = \sqrt{1 + \beta^2} = a \frac{d\beta}{dx} \quad (5.71)$$

の関係を得る。これより以下の微分方程式を得る。

$$\frac{dx}{a} = \frac{d\beta}{\sqrt{1 + \beta^2}} \quad (5.72)$$

この微分方程式について、op 間に渡って両辺を積分すると

$$\int_0^x \frac{dx}{a} = \int_0^\beta \frac{d\beta}{\sqrt{1 + \beta^2}} \quad (5.73)$$

となるので、以下を得る。

$$\frac{x}{a} = \sinh^{-1} \beta \quad (5.74)$$

また、 $\beta$  は (5.68) より

$$\beta = \frac{dz}{dx} = \sinh \frac{x}{a} \quad (5.75)$$

である。これについても両辺を op 間に渡って積分することで

$$z = a \left( \cosh \frac{x}{a} - 1 \right) \quad (5.76)$$

を得る。積分に際しての積分定数は  $x = 0$  において  $z = 0$  であることから求めている。また、(5.70) と (5.75) より

$$l = a \sinh \frac{x}{a} \quad (5.77)$$

が得られる。

浮体運動という観点から考えると  $T_h$  及び  $T_v$  を知ることが重要と言える。等価長さ  $a$  を求めることが出来れば (5.69) から  $T_h$  が求まり、(5.77) より  $l$  が求まり、(5.67) から  $T_v$  を求めることが出来る。 $a$  については既知の値を用いて求めることが出来る。今、既知量である係留取付け点までの鉛直方向距離  $z_1$ 、索長  $L_{all}$ 、アンカーから係留取付け点までの距離  $L_0 + x_1$  の関係を使って

$$\frac{z_1}{L_{all} - (L_0 + x_1)} = \frac{z_1}{L_1 - x_1} = \frac{a \left( \cosh x_1/a - 1 \right)}{a \sinh \frac{x_1}{a} - x_1} = \frac{\cosh x_1/a - 1}{\sinh x_1/a - x_1/a} \quad (5.78)$$

となる。 $z_1/\{L_{all} - (L_0 + x_1)\} = \gamma$ 、 $x_1/a = \kappa$  として、

$$\gamma = \frac{\cosh \kappa - 1}{\sinh \kappa - \kappa} \quad (5.79)$$

を満たす  $\kappa$  を数値的に求め、 $z_1 = a(\cosh x_1/a - 1)$  より  $a$  が求められる。そして、 $x_1$  が求まる。以上より、 $T_h$ 、 $T_v$  等の各値が求まる。以上がカタナリー理論の基本である。

海洋構造物の係留の設置も技術的に難易度が高い。このことは7章で述べる。また、係留索に用いられる材料はチェーンや合成繊維ロープや鋼製ワイヤー等様々なものが海域条件によって使い分けられる。1.1節では浮体式風車の新たな取り組みとして一点係留方式の事例が紹介された(図1.15)。この係留方式は鋼製チェーン、鋼製ワイヤーを数種類繋げた方式が検討された。Srinivasamurthy et al. はこの研究の中で種類の異なる係留索が用いられた場合のカタナリー理論を提唱、実験との検証を行っている[19]。

## 5.5 波浪中の浮体の運動方程式

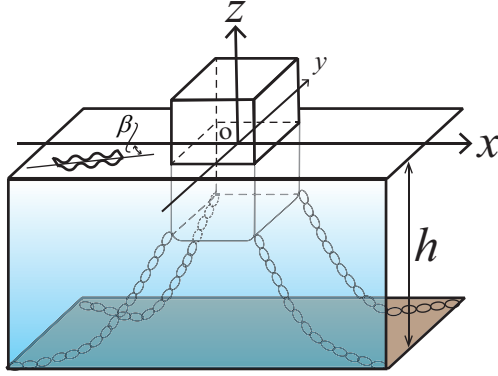


図 5.6: 波浪中の浮体

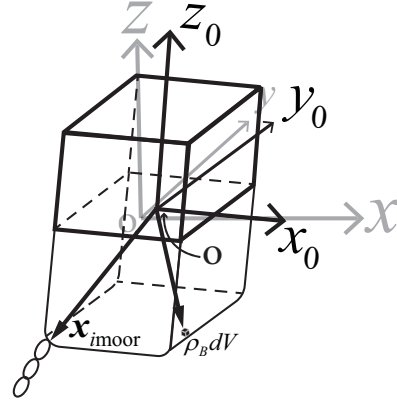


図 5.7: 浮体固定座標系における諸量

係留中の浮体の運動解析に必要な慣性力，付加質量，造波減衰力，波強制力，係留による復原について述べてきた．本節ではこれらを取り纏め，係留浮体の運動解析時に解くべき運動方程式について述べる．図 5.6 に解くべき問題の模式図を示す．波は規則波とし，振幅を  $A$ ，波向きを  $\beta$  とする．図 5.7 に示される様に  $i$  番目の係留索は浮体固定座標系において  $\mathbf{x}_{\text{imoor}} = (x_{\text{imoor}}, y_{\text{imoor}}, z_{\text{imoor}})$  に取り付けられているとする．波の中の浮体運動は，漂流力や浮体の横揺れ減衰力等を一旦除いて考えれば，運動慣性項 = 造波減衰項 + 復原項 + 係留による復原項 + 波浪外力という形で運動方程式を考えることが出来る．

浮体の質量を  $m$ ，慣性モーメントを  $I_{xx}, I_{yy}, I_{zz}$ ，慣性乗積を  $I_{xy}, I_{xz}, I_{yz}$ ，重心位置  $\mathbf{x}_G = (x_G, y_G, z_G)$  とする．これは浮体の質量，質量分布によって決まることは言うまでもない．また，図 5.7 に示される様に慣性モーメント及び慣性乗積は浮体の水線面積中心を原点とした浮体固定座標系で表される．質量マトリックスは (5.64) で示した通りである．これに (5.52) で示した付加質量及び付加慣性モーメント  $a_{ij}$  を加える．従って最終的な慣性項は以下となる．

$$[A] \ddot{\mathbf{X}} = \begin{bmatrix} m + a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & mz_G + a_{15} & -my_G + a_{16} \\ a_{21} & m + a_{22} & a_{23} & -mz_G + a_{24} & a_{25} & mx_G + a_{26} \\ a_{31} & a_{32} & m + a_{33} & my_G + a_{34} & -mx_G + a_{35} & a_{36} \\ a_{41} & -mz_G + a_{42} & my_G + a_{43} & I_{xx} + a_{44} & -I_{xy} + a_{45} & -I_{xz} + a_{46} \\ mz_G + a_{51} & a_{52} & -mx_G + a_{53} & -I_{yx} + a_{54} & -I_{yy} + a_{55} & -I_{zy} + a_{56} \\ -my_G + a_{61} & mx_G + a_{62} & a_{63} & -I_{zx} + a_{64} & -I_{zy} + a_{65} & I_{zz} + a_{66} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{X}_1 \\ \ddot{X}_2 \\ \ddot{X}_3 \\ \ddot{X}_4 \\ \ddot{X}_5 \\ \ddot{X}_6 \end{pmatrix} \quad (5.80)$$

ここで， $[A]$  は慣性マトリックスである．

造波減衰項は (5.52) で示された造波減衰係数をマトリックス  $[B]$  として纏めて

$$[B] \dot{\mathbf{X}} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & b_{14} & b_{15} & b_{16} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & b_{24} & b_{25} & b_{26} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} & b_{34} & b_{35} & b_{36} \\ b_{41} & b_{42} & b_{43} & b_{44} & b_{45} & b_{46} \\ b_{51} & b_{52} & b_{53} & b_{54} & b_{55} & b_{56} \\ b_{61} & b_{62} & b_{63} & b_{64} & b_{65} & b_{66} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \dot{X}_1 \\ \dot{X}_2 \\ \dot{X}_3 \\ \dot{X}_4 \\ \dot{X}_5 \\ \dot{X}_6 \end{pmatrix} \quad (5.81)$$

となる。復原項は (5.48) に示した復原力マトリックスを  $[C]$  として

$$[C] \mathbf{X} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ X_4 \\ X_5 \\ X_6 \end{pmatrix} \quad (5.82)$$

である。  $c_{ij}$  は (5.47) に示した通りである。

次に係留索による復原項について考える。浮体運動変位  $\mathbf{X}$  により係留索の浮体取付け位置は空間固定座標から見て変位する。(5.24) に従えば、  $\mathbf{x}_{\text{imoor}}$  から  $\mathbf{X}_R \times \mathbf{x}_{\text{imoor}}$  へ移動する。海底の係留位置は当然ながら変わらない。5.4 で示したカテナリー理論では浮体の係留索取り付け位置とアンカー位置が決まれば係留索による水平方向、垂直方向の力が求められる。この  $i$  番目の係留索に生じる水平方向、垂直方向の力を  $T_{ih}$ ,  $T_{iv}$  とする。この水平方向、垂直方向の力は図 5.5 に示される様に係留固定の座標系であるので、空間固定座標系に変換する。 $i$  番目の係留索における固定座標系と空間固定座標系とのなす角を  $\alpha_i$  とすると空間固定座標系における  $i$  番目の係留索による力  $\mathbf{F}'_{im}$  は

$$\mathbf{F}'_{im} = \begin{pmatrix} -T_{ih} \cos \alpha_i \\ -T_{ih} \sin \alpha_i \\ -T_{iv} \end{pmatrix} \quad (5.83)$$

となる。浮体の運動変位に伴う空間固定座標系における係留索による力とモーメントは

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_{im} &= \mathbf{X}_R \times \mathbf{F}'_{im} \\ \mathbf{M}_{im} &= (\mathbf{X}_R \times \mathbf{x}_{\text{imoor}}) \times \mathbf{F}_{im} \end{aligned} \quad (5.84)$$

である。

以上より係留による復原力、復原モーメントを  $\mathbf{F}_m$ ,  $\mathbf{M}_m$  として

$$\begin{pmatrix} \mathbf{F}_m \\ \mathbf{M}_m \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^N \begin{pmatrix} \mathbf{F}_{im} \\ \mathbf{M}_{im} \end{pmatrix} \quad (5.85)$$

となる。 $N$  は係留索の本数を意味している。

最後に波による力やモーメントは (5.53) で表される。これを  $\mathbf{F}_d$ ,  $\mathbf{M}_d$  とする。

以上より係留浮体の波浪中の運動方程式は

$$[A] \ddot{\mathbf{X}} = -[B] \dot{\mathbf{X}} - [C] \mathbf{X} + \begin{pmatrix} \mathbf{F}_m \\ \mathbf{M}_m \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{F}_d \\ \mathbf{M}_d \end{pmatrix} \quad (5.86)$$

となり、これを解くことで浮体の 6 自由度運動が求められる。尚、時刻歴解析は様々な手法があり、Runge-Kutta-Gill 法や、Newmark- $\beta$  法が有名である。

## 第 6 章

# 境界要素法とは

速度ポテンシャルは流体の全領域において Laplace の式を満たす。Laplace の式には基本解が存在している。あとは境界条件により各地点における速度ポテンシャルは一意に決まることとなる。浮体形状は任意形状をしており、境界値問題を数値的に解くことが必要となる。この境界値問題は古くから特異点分布法や境界要素法によって解かれてきた。どちらの方法も 3 次元の問題を 3 次元の問題のまま解く必要はない。3 次元の問題であれば、基本解を用いて 2 次元の境界値問題とすることが出来、2 次元の問題も同様に 1 次元の境界値問題とすることが出来る。境界要素法や特異点分布法は計算負荷が非常に小さいのが最大の特徴である。

本章では直感的に分かり易い特異点分布法について最初に述べる。特に渦を分布させる分布渦法の境界積分方程式までの定式化や、離散化による行列式への落とし込み方について述べる。分布渦法よりさらに分かり易いのは離散渦法かと思われるが、分布渦法のみならず離散渦法については文献 [20] に詳しい。次に、境界要素法について述べる。境界要素法については境界積分方程式までの定式化について述べた後、Green 関数を用いることによる境界積分方程式までの定式化について述べる。浮体運動中の波の速度ポテンシャルは自由表面条件を考える必要があり、水波の Green 関数が使われることが多い。

### 6.1 分布渦法

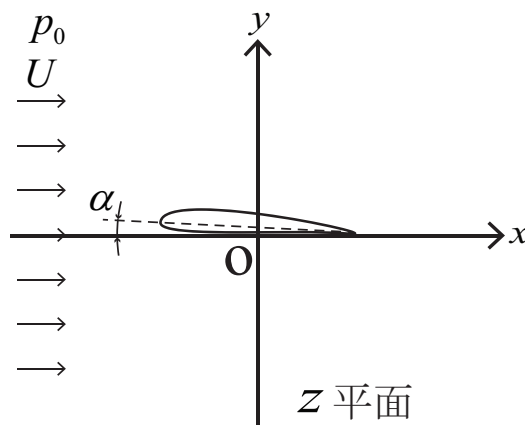


図 6.1: 一様流中の 2 次元翼

今、図 6.1 に示すような一様流中の 2 次元翼に生じる揚力の問題を考える。一様流の流速を  $U$ 、迎角を  $\alpha$  とする。この計算のモデル化において図 6.2 のように渦を  $z = z_s(\zeta)$  の位置に配置する。これを特異点 (singularity や source 点) という。(3.16) の通り、循環  $\Gamma$  の渦糸が原点に置かれた場合は  $-i/(2\pi)\Gamma \log z$  である。 $z = z_s(\zeta)$  に循環  $\gamma(\zeta)$  の渦糸

が置かれた場合，複素速度ポテンシャルは  $-i/(2\pi)\gamma(\zeta) \log \{z - z_s(\zeta)\}$  で表される．渦糸を翼表面上に分布させるので，翼表面上で渦糸を積分し以下の様に表現される．

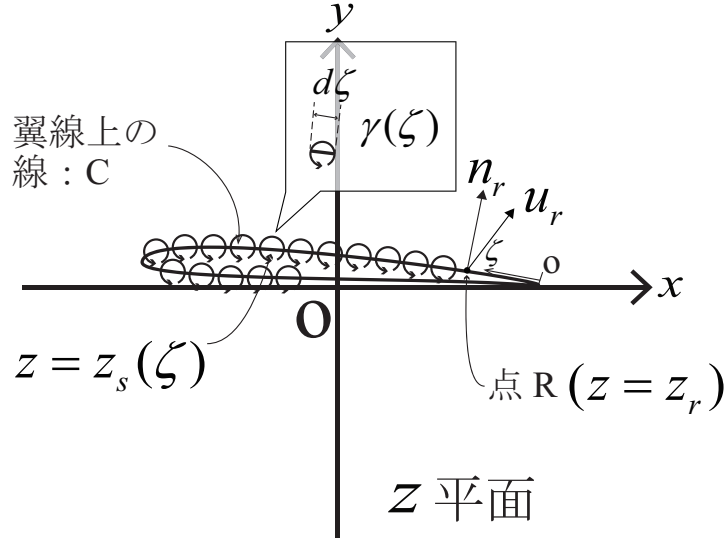


図 6.2: 翼上に置かれた渦

$$f(z) = Uz - \frac{i}{2\pi} \int_C \gamma(\zeta) \log \{z - z_s(\zeta)\} d\zeta \quad (6.1)$$

となる．ここで  $C$  は翼表面上を意味している．複素流速は

$$\frac{df(z)}{dz} = u(x, y) - iv(x, y) = U - \frac{i}{2\pi} \int_C \frac{\gamma(\zeta)}{z - z_s(\zeta)} d\zeta \quad (6.2)$$

である．

(6.1) は一様流や渦といった支配方程式のラプラスの式を満足する基本解の組み合わせで構成されており， $\gamma(\zeta)$  は現段階では未知数である．ここから翼面での境界条件を用いて未知数  $\gamma(\zeta)$  を求めていくのが渦分布法の要の考え方と言える．

今，境界条件について考える．物体表面条件は (2.10) で示した通りとなる．翼面上での任意の点  $R(z = z_r)$  における複素流速  $\bar{u}_r$  及び法線  $n_r$  として，以下が境界条件となる．

$$\Re\{\bar{u}_r \cdot n_r\} = 0 \Big|_C \quad (6.3)$$

この点  $R$  のことを参照点 (reference point) という． $\bar{u}_r = u_r - iv_r$  であることに注意する．また， $\Re$  は実部を意味する． $\bar{u}_r$  は (6.2) より以下となる．

$$\bar{u}_r(z_r) = U - \frac{i}{2\pi} \int_C \frac{\gamma(\zeta)}{z_r - z_s(\zeta)} d\zeta \quad (6.4)$$

(6.3) に (6.4) を代入して

$$\Re\{U n_r\} + \frac{1}{2\pi} \int_C \Im \left\{ \frac{\gamma(\zeta) n_r}{z_r - z_s(\zeta)} \right\} d\zeta = 0 \Big|_C \quad (6.5)$$

を得る．これは翼表面上の全ての  $z_r$  において成立する  $\gamma(\zeta)$  についての境界積分方程式である．尚， $\Im$  は虚部を意味する．

境界積分方程式である (6.5) における曲線  $C$  は，この場合は翼形状を表わしており任意の形状と言える．その為，解析的な積分が容易には出来ない．そこで，ここからこの境界積分方程式の離散化を試みる．最初に，曲線  $C$  を  $n$  個の微小線要素に区切っていく．微小線要素の大きさをそれぞれ  $l_i (1 \leq i \leq n)$  とする．また，微小区間内で循環  $\gamma(\zeta)$  は線形的に変化するものとする．そして，図 6.3 に示すように微小線要素の端に循環  $\gamma_i$  及び  $\gamma_{i+1}$  の渦糸を置くことにより

$i$  番目の微小線要素内の循環を線形補間して表わす．この際、 $\xi(0 \leq \xi \leq l_i)$  という局所座標系を設ける．即ち、以下の様に表すことが出来る．

$$\gamma(\xi) = \gamma_i + \frac{\xi}{l_i}(\gamma_{i+1} - \gamma_i) \quad (6.6)$$

また、離散化された渦を置く位置  $z_s(\xi)$  も同様に以下の様に表すことが出来る．

$$z_s(\xi) = z_{s,i} + \frac{\xi}{l_i}(z_{s,i+1} - z_{s,i}) \quad (6.7)$$

$j$  番目の参照点  $z_{r,j}$  は  $j$  番目の要素の midpoint に置くとすれば

$$z_{r,j} = \frac{1}{2}(z_j + z_{j+1}) \quad (6.8)$$

であり、その単位法線  $n_{r,j}$  は

$$n_{r,j} = \frac{z_{j+1} - z_j}{il_j} \quad (6.9)$$

で与えられる． $j$  も  $1 \leq j \leq n$  である．(6.5) 式に (6.6) 式を代入して以下の様に離散化出来る．即ち、 $j = 1 \sim n$  に

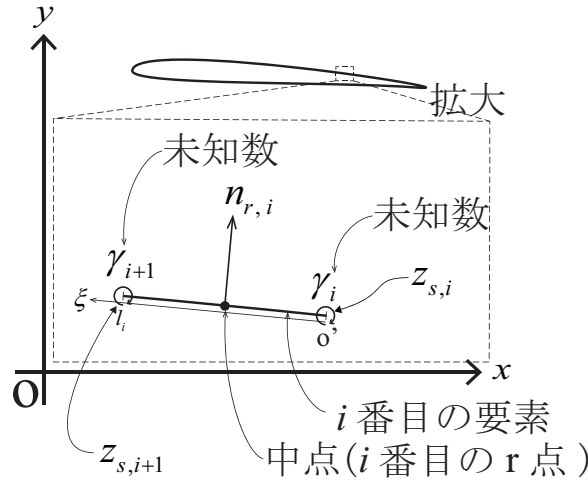


図 6.3: 翼面の離散化

対し、

$$\Re \{Un_{r,j}\} + \frac{1}{2\pi} \sum_{i=1}^n \int_0^{l_i} \Im \left\{ \frac{\gamma_i + (\xi/l_i)(\gamma_{i+1} - \gamma_i)}{z_{r,j} - \{z_{s,i} + \xi/l_i(z_{s,i+1} - z_{s,i})\}} \right\} n_{r,j} d\xi = 0 \Big|_C \quad (6.10)$$

が成り立つ．未知数は  $\gamma_i$  であり、上式から分かる通り  $n+1$  個の未知数が存在することになる．もう一つの条件は翼端における Kutta-Joukowski の条件 [20] を用いる． $n+1$  個の未知数に対して  $n+1$  個の方程式が存在するので解を一意に決めることが可能となる．

(6.10) の積分は解析的に取り扱うことが可能である．未知数である  $\gamma_i$  及び  $\gamma_{i+1}$  に関わる項を  $S_{ij}^{(1)}, S_{ij}^{(2)}$  として

$$\begin{aligned} S_{ij}^{(1)} &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{l_i} \Im \left\{ \frac{1 - \xi/l_i}{z_{r,j} - \{z_{s,i} + \xi/l_i(z_{s,i+1} - z_{s,i})\}} \right\} n_{r,j} d\xi \\ S_{ij}^{(2)} &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{l_i} \Im \left\{ \frac{\xi/l_i}{z_{r,j} - \{z_{s,i} + \xi/l_i(z_{s,i+1} - z_{s,i})\}} \right\} n_{r,j} d\xi \end{aligned} \quad (6.11)$$

となる．よって、(6.10) は

$$\Re \{Un_{r,j}\} + \sum_{i=1}^n (S_{ij}^{(1)} \gamma_i + S_{ij}^{(2)} \gamma_{i+1}) = 0 \Big|_C \quad (j = 1, 2, \dots, n) \quad (6.12)$$

上式左辺の未知の係数  $\gamma_i$ ,  $\gamma_{i+1}$  に関わる項を下記のように変形する.

$$S_{i1}^{(1)}\gamma_1 + \sum_{i=2}^n (S_{i-1,j}^{(2)} + S_{ij}^{(1)})\gamma_i + S_{nj}^{(2)}\gamma_{n+1} \quad (6.13)$$

このように考えると以下のような行列式となることが分かる.

$$\begin{bmatrix} S_{11}^{(1)} & S_{11}^{(2)} + S_{21}^{(1)} & \cdots & S_{i-1,1}^{(2)} + S_{i1}^{(1)} & \cdots & S_{n-1,1}^{(2)} + S_{n1}^{(1)} & S_{n1}^{(2)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ S_{1j}^{(1)} & S_{1j}^{(2)} + S_{2j}^{(1)} & \cdots & S_{i-1,j}^{(2)} + S_{ij}^{(1)} & \cdots & S_{n-1,j}^{(2)} + S_{nj}^{(1)} & S_{nj}^{(2)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ S_{1n}^{(1)} & S_{1n}^{(2)} + S_{2n}^{(1)} & \cdots & S_{i-1,n}^{(2)} + S_{in}^{(1)} & \cdots & S_{n-1,n}^{(2)} + S_{nn}^{(1)} & S_{nn}^{(2)} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \gamma_3 \\ \vdots \\ \gamma_n \\ \gamma_{n+1} \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \Re\{Un_{r,1}\} \\ \Re\{Un_{r,2}\} \\ \Re\{Un_{r,3}\} \\ \vdots \\ \Re\{Un_{r,n}\} \\ 0 \end{pmatrix} \quad (6.14)$$

ここからも分かるように、渦分布法は蜜行列となる．それは一つの参照点は全ての渦の影響を考えるからに他ならない．しかし、この行列は境界の分割数のみであるので、行列式は大変に小さいのが大きな特徴である．その為、計算負荷は Navier-Stokes 方程式を解く手法と比較して圧倒的に小さくなる．境界要素法も特異点分布法も渦分布法と考え方は近いので同じことが言える．

## 6.2 浮体周りの速度ポテンシャルを求める為の境界要素法

渦分布法は多数の渦を境界である翼面に配置した．渦の中心は特異点であり、特異点分布法という言葉の意味はここから来ている．境界要素法も定式化の過程は異なるにせよ、同じような考えに基づく．結果的に導出された積分境界方程式は、様々な特異点を境界上に置いた形となっている．そして、その境界積分方程式を離散化した後に行列化して速度ポテンシャルを求める．様々な支配方程式に対する境界要素法は田中等による「境界要素法 (培風館)」[21] に詳しく説明されており、神谷紀生による「演習境界要素法 (サイエンス社)」[22] には具体例を使った計算手法が紹介されている．浮体運動を解く為には自由表面条件の取り扱いが重要となる．これについては日本造船学会海洋工学委員会性能部会編集の「実践浮体の流体力学 前編」[23] に詳しい．

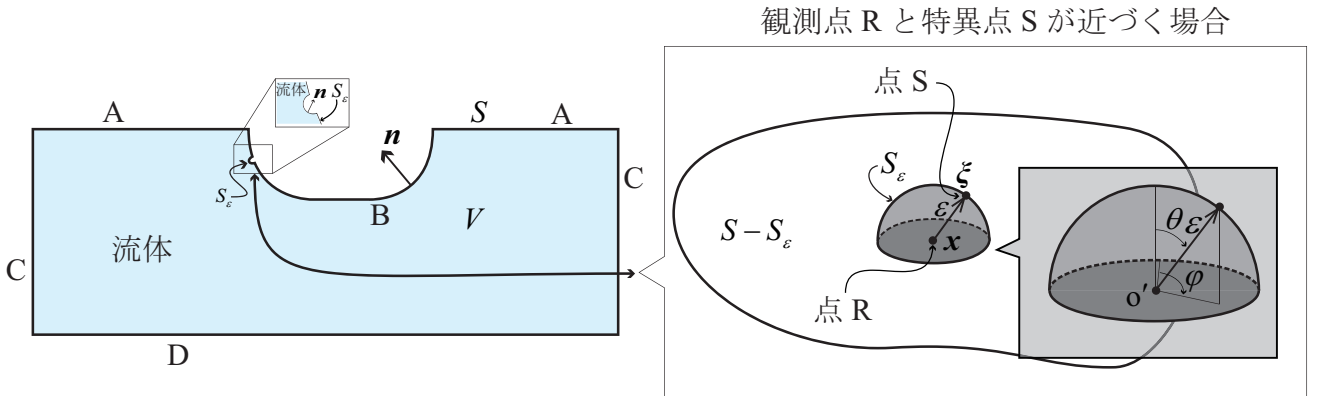


図 6.4: 流体領域と境界

今、図 6.4 左のように境界  $S$  で囲まれた流場を考える．法線ベクトル  $\mathbf{n}$  は流体から外向きを正とする．イメージとしては  $A$  が自由表面、 $B$  が物体表面、 $C$  が無限遠方、 $D$  が水底という境界を意味しているが、ここではただの境界  $S$  として考えることとする．流体全域 ( $V$ ) で Laplace の式を満たす 2 つの任意の関数  $\phi$ ,  $\psi$  があるとする．Green の第二定理より

$$\iint_S \left( \phi \frac{\partial \psi}{\partial n} - \psi \frac{\partial \phi}{\partial n} \right) dS = \iiint_V (\phi \Delta \psi - \psi \Delta \phi) dV = 0 \quad (6.15)$$

が成り立つ。ここで、 $\psi$  について点  $S(\xi, \eta, \zeta)$  に強さ 1 の湧き出し (実際には吸い込み) を置いた時の速度ポテンシャルとする。即ち、 $\psi(x, y, z; \xi, \eta, \zeta)$  は以下で表される。

$$\psi(\mathbf{x}; \boldsymbol{\xi}) = \frac{1}{4\pi r} = \frac{1}{4\pi \sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + (z - \zeta)^2}} \quad (6.16)$$

当然ながらこの速度ポテンシャルは点  $S$  の特異点 (Source points) を除いて Laplace の方程式を満足する。

次に、(6.15) の左辺の面積分について考えていく。面積分は  $(\xi, \eta, \zeta)$  を積分変数として行う。これは湧き出し  $\psi$  を境界  $S$  上に分布させることに他ならない。また、 $\partial\psi/\partial n$  にも物理的な意味がある。(3.33) で示された通り、湧き出しの法線方向の微分は法線を軸とする二重湧き出しを意味する。よって、この面積分は境界上に分布させた湧き出しと、境界の法線方向を軸とする二重湧き出しを分布させているという物理的な意味を持っていることが分かる。この際、観測点  $R$  (Reference points) は空間任意の位置に固定された点である。

前節の分布渦法において境界条件を設定する時に観測点  $R$  は分布させた特異点と特異点の中心に設けた。境界要素法では特異点と観測点を一致する場合 ( $r = 0$ ) があるが、これは数学的に精緻に取り扱うことが出来る。図 6.4 右の拡大図に示すように、面積分の際に特異点  $S$  が観測点  $R$  に近づく時、観測点を中心とする半径  $\epsilon$  の微小半球  $S_\epsilon$  を付加して考える。即ち、(6.15) は以下のように書き直すことが出来る。

$$\frac{1}{4\pi} \iint_{S+S_\epsilon} \left( \phi \frac{\partial}{\partial n} \frac{1}{r} - \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial n} \right) dS = 0 \quad (6.17)$$

これを変形すれば

$$\frac{1}{4\pi} \iint_S \left( \phi \frac{\partial}{\partial n} \frac{1}{r} - \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial n} \right) dS = -\frac{1}{4\pi} \iint_{S_\epsilon} \left( \phi \frac{\partial}{\partial n} \frac{1}{r} - \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial n} \right) dS \quad (6.18)$$

となる。

右辺第 1 項目の積分について、図 6.4 左の拡大図と右の拡大図からも分かるように、 $S_\epsilon$  の半球体において法線方向は半径方向と逆向きである為、 $1/r$  の法線方向微分は  $1/r^2$  となり、 $\epsilon \rightarrow 0$  の極限を考えると以下となる。この際、 $\phi(\mathbf{x})$  は  $S_\epsilon$  内で一定の値である。

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \iint_{S_\epsilon} \phi(\mathbf{x}) \frac{\partial}{\partial n} \frac{1}{r} dS = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \phi(\mathbf{x}) \iint_{S_\epsilon} \left( -\frac{\partial}{\partial r} \frac{1}{r} \right) dS = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \phi(\mathbf{x}) \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{\theta=0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\epsilon^2} \epsilon^2 \sin \theta d\theta d\varphi = 2\pi \phi(\mathbf{x}) \quad (6.19)$$

一方で、右辺第 2 項目は被積分項の中に  $1/r$  があり、半球上では  $1/\epsilon$ 、そして半球の微小面積は  $\epsilon^2 \sin \theta d\theta d\varphi$  なので、被積分関数は  $O(\epsilon)$ 。よって、 $\epsilon \rightarrow 0$  の極限を取ると 0 となる。

以上より、(6.18) は観測点が境界上に置かれている時、最終的に以下の境界積分方程式を得る。

$$\phi(\mathbf{x}) = -\frac{1}{2\pi} \iint_S \left( \phi \frac{\partial}{\partial n} \frac{1}{r} - \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial n} \right) dS \quad (6.20)$$

ここに然るべき境界条件を入れて解けば良いのだが、浮体周りの速度ポテンシャルを求めるに際して自由表面条件があり、もう少し工夫して速度ポテンシャルを求めるのが一般的な手法である。

図 6.5 に水に浮かぶ浮体とその座標系を示す。水面上の浮体は省いている。法線ベクトル  $\mathbf{n}$  は流体外向きを正と定義する。浮体の境界を  $S_H$ 、自由表面の境界を  $S_F$ 、水底の境界を  $S_B$ 、遠方に置かれた仮想境界を  $S_\infty$  と定義する。

既に用いてきた湧き出しのポテンシャル  $1/r$  に加えて、関数  $H(\mathbf{x}; \boldsymbol{\xi})$  を加えた関数  $G(\mathbf{x}; \boldsymbol{\xi})$  を定義する。

$$G(\mathbf{x}; \boldsymbol{\xi}) = \frac{1}{r} + H(\mathbf{x}; \boldsymbol{\xi}) \quad (6.21)$$

$r$  は (6.16) と同じ定義であり、観測点  $R(\mathbf{x})$  と特異点  $S(\boldsymbol{\xi})$  の距離である。この関数  $G(x, y, z; \xi, \eta, \zeta)$  は以下の境界条件を満たすこととする。

$$\begin{cases} \nabla^2 G(\mathbf{x}; \boldsymbol{\xi}) = -\delta(\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}) & \in V \\ \frac{\partial G}{\partial \zeta} + kG = 0 & \in S_F \\ \frac{\partial G}{\partial \zeta} = 0 & \in S_B \\ \text{波は外方へ伝播すること} & \in S_\infty \end{cases} \quad (6.22)$$



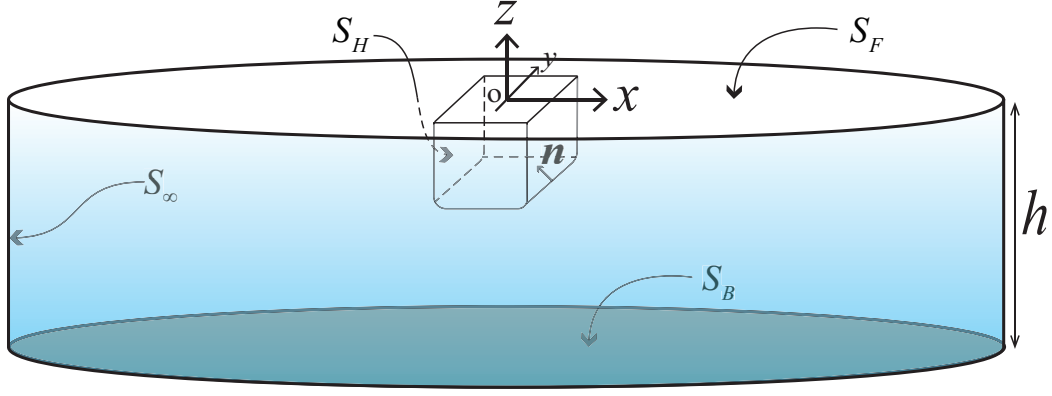


図 6.5: 各境界の定義

ここで、 $\delta$  はデルタ関数であり、 $\mathbf{x} = \boldsymbol{\xi}$  で発散し、その他では 0 となる関数である。また、 $k$  は波数である。この様な、Laplace 等の偏微分方程式の基本解となる関数のことを Green 関数という。特に、上式のような自由表面条件を満足する Green 関数のことを水波の Green 関数と呼ぶ。この Green 関数によって境界積分方程式は次式となる。

$$\phi(\mathbf{x}) = -\frac{1}{2\pi} \iint_{S_H} \left( \phi(\boldsymbol{\xi}) \frac{\partial}{\partial n} G(\mathbf{x}; \boldsymbol{\xi}) - G(\mathbf{x}; \boldsymbol{\xi}) \frac{\partial \phi(\boldsymbol{\xi})}{\partial n} \right) dS \quad (6.23)$$

さらに速度ポテンシャルの物体表面上の境界条件より未知数と既知数に分けると以下となる。

$$\phi(\mathbf{x}) + \frac{1}{2\pi} \iint_{S_H} \phi(\boldsymbol{\xi}) \frac{\partial}{\partial n} G(\mathbf{x}; \boldsymbol{\xi}) dS = \frac{1}{2\pi} \iint_{S_H} G(\mathbf{x}; \boldsymbol{\xi}) \frac{\partial \phi(\boldsymbol{\xi})}{\partial n} dS \quad (6.24)$$

そして、diffraction 問題における速度ポテンシャル  $\phi_7$  は (5.12) の物体表面条件より、以下の境界積分方程式となり

$$\phi_7(\mathbf{x}) + \frac{1}{2\pi} \iint_{S_H} \phi_7(\boldsymbol{\xi}) \frac{\partial}{\partial n} G(\mathbf{x}; \boldsymbol{\xi}) dS = -\frac{1}{2\pi} \iint_{S_H} G(\mathbf{x}; \boldsymbol{\xi}) \frac{\partial \phi_0(\boldsymbol{\xi})}{\partial n} dS \quad (6.25)$$

radiation 問題における  $\phi_1 \sim \phi_3$  までは (5.9) より

$$\phi_j(\mathbf{x}) + \frac{1}{2\pi} \iint_{S_H} \phi_j(\boldsymbol{\xi}) \frac{\partial}{\partial n} G(\mathbf{x}; \boldsymbol{\xi}) dS = \frac{i\omega}{2\pi} \iint_{S_H} G(\mathbf{x}; \boldsymbol{\xi}) n_j dS \quad (j = 1, 2, 3) \quad (6.26)$$

となり、 $\phi_4 \sim \phi_6$  までは

$$\phi_j(\mathbf{x}) + \frac{1}{2\pi} \iint_{S_H} \phi_j(\boldsymbol{\xi}) \frac{\partial}{\partial n} G(\mathbf{x}; \boldsymbol{\xi}) dS = \frac{i\omega}{2\pi} \iint_{S_H} G(\mathbf{x}; \boldsymbol{\xi}) (\mathbf{x}_0 \times \mathbf{n})_{j-3} dS \quad (j = 4, 5, 6) \quad (6.27)$$

という境界積分方程式となる。

これを 6.1 節で述べたように離散化、行列式化し、未知数  $\phi_j (j = 1 \sim 7)$  を解いていく。ここでは説明しないが、Green 関数  $G(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})$  の計算手法は文献 [23] に詳しく、面積分の特に高次積分は文献 [21] に詳しい。

## 第 7 章

# 浮体式風車の実海域試験における設置方法

## 7.1 緒言

近年、浮体式洋上風力は、新たな電気エネルギー源として注目を集めている。我が国のみならず、世界的にも研究開発が活発に進んでいる。研究事例としての多くは、風車－浮体－係留系の連成数値計算手法の確立 [24]、水槽試験による検証 [6] が大多数を占める。実海域における浮体式洋上風車の数ヶ月、数年に及ぶ長期における試験となると、経費の問題、海面専有による地域関係各所との調整の問題、設置浮体のメンテナンスの問題等々の諸課題があり、実施例は非常に少ない。その為、設置、モニタリング、撤去等々に関する知識や知見は非常に乏しくなってしまうのが実情ではないかと思われる。

また、機械部品、電装品、係留系の耐久性、風車のメンテナンス方法や性能の把握等といった水槽試験だけでは十分に明らかにすることが出来ない諸課題があることも事実であり、実海域試験を通して新規技術の研究開発を行う必要もあると考える。さらには、洋上での長期間に及ぶ実海域試験は海域の占有期間も長いため、関連機関との調整がとても重要となる。

本浮体式風車は直径 2.4m の水平軸風車、1kW 程度の発電が可能なダイレクトドライブ型発電機、一点多本カテナリー係留、浮体部分で主に構成される。また、フェザリングや風速に応じてのブレード迎角変更が可能なように風車ブレードのピッチ角を制御することが可能である。本機の詳細については文献 [11] を参照されたい。

本方式のような一点係留方式を採用した浮体式風車の機構の検討については村井、二瓶等 [25] によって行われている。また、回頭運動に関する研究も飯島、黒田等 [26] によって実施されている。

本報では、既に述べた理由により実施例が非常に少ない浮体式洋上風力、特に一点多本係留された浮体式洋上風車の実海域試験の施工（インストール）、モニタリング、撤去方法について述べる。また、長期の実海域試験において調整を行った関連機関について述べる。

## 7.2 実海域試験サイトと浮体配置

本浮体式風車の実機を用いて東京大学生産技術研究所海洋工学水槽にて波浪中動揺試験、風中動揺試験、風浪下での試験、そして回転機構の機能検証試験を行った。実機は防汚塗料（中国塗料株式会社製 バイオクリン ECO-2）の塗布を施された後、金沢工業大学穴水自然学苑内の実海域船舶海洋研究所へと輸送され、約 2 カ月間の試験を行うこととなった。試験期間は 2015 年 2 月 4 日から同年 3 月 21 日である。（尚、試験期間はインストール作業や、風車のメンテナンス作業、撤去作業を含む。）

事前に設置点付近における水深調査、海底土質調査を行った。図 7.1 に事前調査の結果分かった設置海域の水深及び調査結果に基づき決定した浮体やアンカー等の設置位置を示す。浮体中心は北緯 37 度 13 分 26 秒～27 秒、東経 136 度 55 分 56 秒～57 秒に位置する。アンカーは 20kgf アンカー 2 つ 40kgf アンカー 1 つの合計 3 つを使用した。漂流距離等を検討した結果、専有半径は凡そ 24m 程度となった。尚、この付近の海底土質は泥または砂地である。

図 7.2 には図 7.1 における C 断面図を示す。断面図からも分かるように回転軸中心から 6m 離れたところでチェーンは海底に接している。

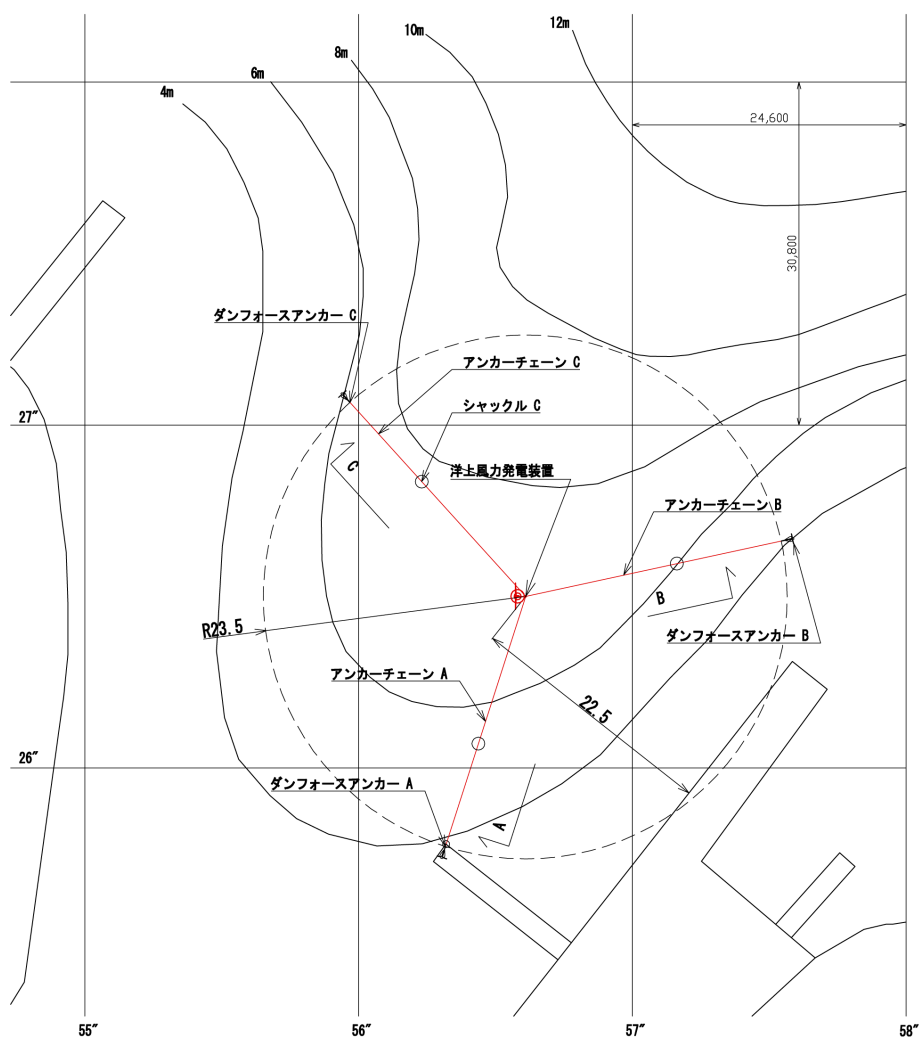
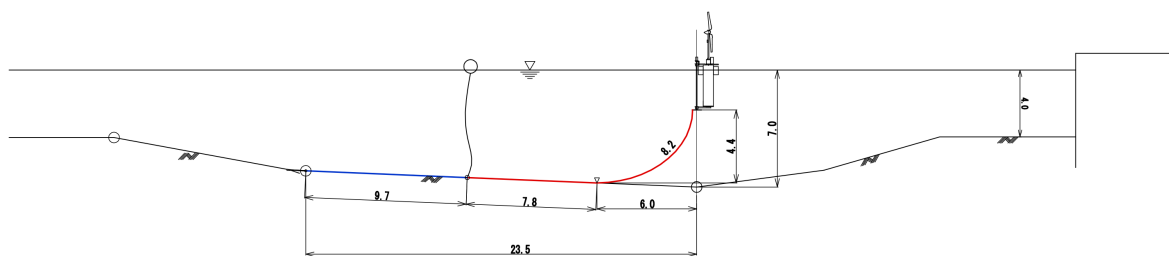


図 7.1: Layout of the real-sea test



C 断面図

図 7.2: C-Cross-section in 図 7.1

## 7.3 海面の長期占有による関連機関への申請

本試験に際し、海面を長期占有することからいくつかの関連機関への申請が必要となった。最初に海上保安庁である。どのような手順で設置するか、どれくらいの期間試験を行うか、設置時・夜間・常時の安全対策等の内容について届け出た。本浮体の係留ラインやアンカーがハーバー境界から出ており河川区域指定範囲に入っていた。その為、県土木事務所にも占有許可申請を行った。最後に漁業組合である。試験時期にはナマコの底引き漁もあるため関係ある漁業組合に申請を行っている。

## 7.4 本研究における浮体式風車概要

本研究における浮体式風車の概要について述べる。二次元 CAD 図面を図 7.3 に示す。緒言でも少し触れたが、本浮体式風車は一点多本 (3 本のチェーン) で係留されている。3 本の係留チェーン (A) はアーム材 (B) に連結している。アーム材と鋼管 (C) は接合されている。(A), (B), (C) の部品は回転軸となり、この軸周りに浮体は回転する。陸上側には計測・制御室が設けられており、そこから 2 本の電気線が鋼管 (C) 内を通してスリッピング (D) を介して浮体側に繋がっている。2 本の電気線は電力線及び制御線である。電力線はスリッピング (D) を介し、整流回路・発電機ボックス (E) に繋がっている。制御線は整流回路・発電機ボックス内部 (E) を通り風車ナセル内のピッチコントロールモータに接続されている。

浮体部はベアリング部 (F) により係留軸周りに回転するが、浮体や係留は外乱により常に動揺している為、軸の偏心がある。その為、容易には回転しないことに注意を要する。このベアリング部の機構の詳細については二瓶の研究 [11] を参照されたい。

様々な計測データは計測ボックス (G) 内に収録され陸上の計測室にテレメータ装置によって転送されモニタリングすることが出来る。

## 7.5 施工 (インストール) ・実験時の様子・撤去まで

### 7.5.1 インストール方法

順を追ってインストール方法について述べる。インストールは 2015 年 2 月 4 日、5 日の二日間にかけて行われた。最初に、図 7.1 の配置図に従い、GPS を用いてブイを設置した (図 7.4c)。これは、アンカー及び浮体を正確に設置する為である。アンカーはそのブイを目標として投入し把駐した (図 7.4d)。尚、この際の投入部分は、アンカーから係留チェーン途中に付けられたシャックルまでである。シャックルにはロープとブイが付けられ連結する際の目印となる。図 7.4c には係留アンカー点付近を示すブイ (写真一番奥)、シャックルの位置を示すブイ (写真真ん中)、浮体の目標位置を示すブイ (写真手前) が示されている。

浮体及び作業台船は船で目標地点まで曳航される (図 7.4d)。作業台船には浮体下部に接続された残りの係留チェーン 3 本、電力・制御線が載せられている。目標地点まで浮体を曳航した後、海底にあるシャックルを引き上げ浮体側から出ている係留チェーンと接続する (図 7.4e)。同様の作業を 3 本とも行えばインストール作業は終了となる。図 7.4f にインストール作業終了後の様子を示す。また、本浮体の係留チェーンの取り付け状況、電気線の水중写真を図 7.4g に示す。

### 7.5.2 実験時の様子と水中写真

実海域試験の最後に水中写真を撮影した。冬の 2 カ月間弱、試験海域である七尾湾において藻類はさほど成長しないと思われたが念のため撮影を行った。図 7.5a には係留チェーン取り付け点における水中写真が示されている。薄く茂類が付着しているのが見て取れる。図 7.5 にアンカーの水中写真を示す。

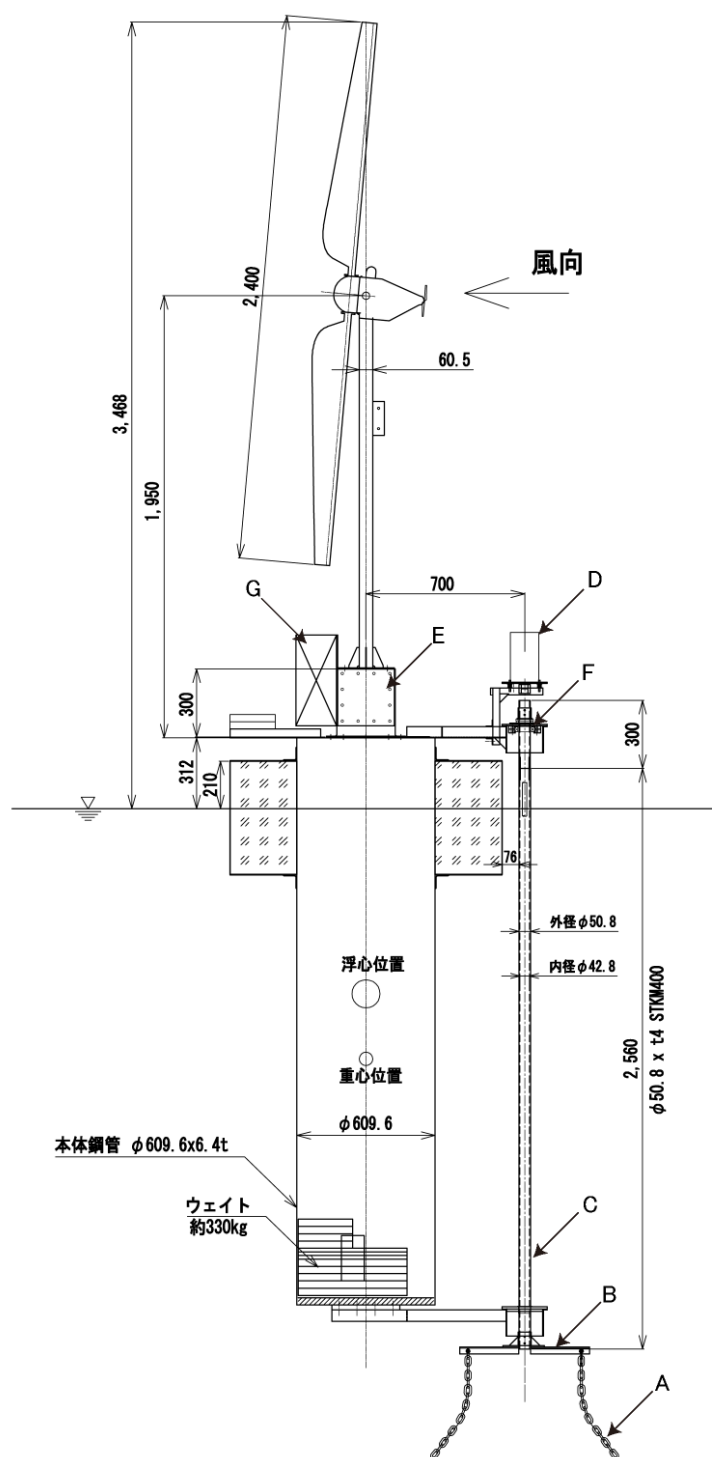


図 7.3: Drawing of the floating wind turbine



(a) Tentative set of the anchor points



(b) Installation of the anchor



(c) Mark buoys for anchor and connecting shackle, and the floating structure



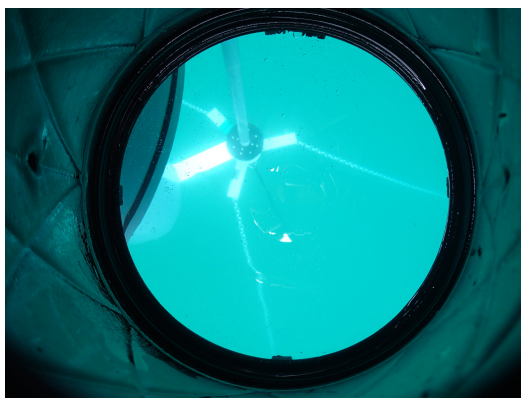
(d) Towing of the wind turbine and other devices on the salvage barge



(e) Connection of the mooring chain



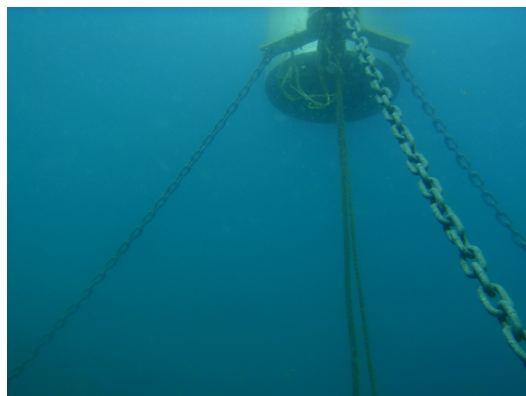
(f) Wind turbine after the installation work



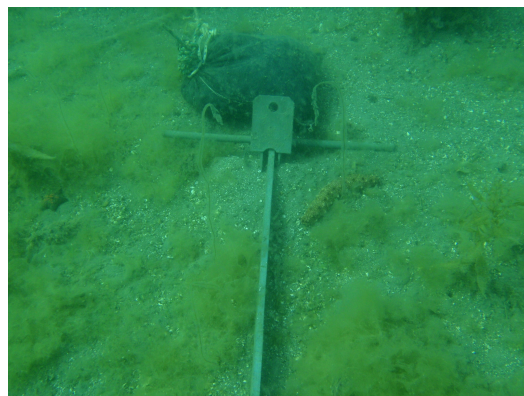
(g) Underwater view of the chains and the electric lines

図 7.4: 浮体式風車のインストール時の様子





(a) The chains and the cables



(b) Anchor

図 7.5: 実海域試験後の水中の様子

### 7.5.3 撤去

撤去作業は2015年3月21日の一日間で行われた。撤去に際しダイバー作業も必要となった。浮体下部の係留チェーン取り付け点から係留チェーンを取り外し、浮体・電気線と係留チェーン一式とを分ける為である。インストール作業時と同様、作業台船に電気線を載せ、浮体と作業台船を岸まで船で曳航してきた。その後、海中においてダイバーが係留チェーンとアンカーの接続を解き、それぞれを別々に引き上げた。アンカーの引き上げに際し、図 7.6 に示されるようにエアリフターを用いてアンカーの引き上げを行った。



図 7.6: Air-lift for the anchors

## あとがき

本著は大阪公立大学大学院の浮体運動学特論の講義資料として重要だと思われる知見の一部を記しました。

海事流体力学に関する書籍において MIT の名誉教授でもある J.N.Newman によって著わされた Marine Hydrodynamics があります。海洋工学を学ぶ人にとってこの書籍は名著の一つと言っても過言ではないでしょう。私が大学院に進学する際に恩師の東京大学生産技術研究所の木下健教授 (現名誉教授) に「初学の私が何から学び始めたら良いでしょうか」と尋ねた際に示された書籍の一冊がこの Marine Hydrodynamics です。高校の時から新しい船や飛行機や車を作りたいと思っていましたが、学部生時代に学んだ機械工学は要素技術を極める感があり、自分にとっては歯がゆさを感じる学びの時期であったと思います。そんな中で出会った総合工学という学問は私にとって未知であったとともに希望であったことを今でも昨日の様に覚えています。しかし、何を自身の軸にすれば良いのか右も左も分からない状態であった際に先生から示されたのがこの書籍でした。

何とか理解したいと思い読み始めましたが、読み始めた当初はとにかくチンプンカンプン。式がまずもって難しい。独特の書きっぷりに加え、同著を理解するための高度な数学や力学の知識もまだまだ当時の自分には不十分であったと思います。何よりも一番大きかったのは総合工学の肝とは何か想像できずに読み進められなかったことに尽きるであろうと思います。

波浪中の浮体運動に関する研究で博士号を取得し、海上技術安全研究所で勤めました。ここでは洋上における石油天然ガス生産用の浮体式構造物の運動というものが研究テーマでした。運動解析をするというのは大型の水槽試験に加えて、その中で生じた現象を説明することが求められます。浮体の安全性は大変重要であるから当然です。正に、修士、博士、研究員として Marine Hydrodynamics の中で述べられることを体験、経験する有意義な時代であったと思います。

その後、縁あって 2009 年に大阪府立大学に来ました。ここで新たに始めたのが浮体式風車のプロジェクトです。来るべき時代に備えエネルギー問題に資することをしたいと思い 2010 年頃から取り組み始めました。2015 年には研究室としては大きなプロジェクトである実海域試験に取り組みました。発電機そのものの製作からブレード製作、風車タワー製作、浮体製作に始まり、海上での浮体式風車の設置や撤去、そして長期間に渡る試験はかけがえのない経験を積んだと思います。まさに総合工学的な視点が重要でした。私が実海域試験で取り組んだのは一点係留式浮体式風車で、2015 年当時は見向きもされない形式でしたが、2017 年頃から NEDO を始めフランスでもこの方式が採用された大きな実証試験が始まっています。

そうこうしている間に始めたのが養殖漁業の自動化・情報化・機械化に資する取り組みです。中でも四胴型自動航行船の取り組みは同船の特殊機能と養殖漁業が行われる海域の高精度な高分解能水質シミュレーションとその結果を人工知能に学習させ予報をするという出口戦略も考えた研究開発でした。四胴型自動航行船は関連特許が 6 件あり、企業への技術移転を果たしました。また、海面養殖事業をやっている方々がこれまで知り得なかった湾や沼の水質を具にすることも出来るようになりました。研究開発の過程で随所で海事流体力学の知識が使われました。

2021 年からは養殖漁業の労働軽減の為に生け簀に置かれた自動給餌機への餌補給船の研究開発を始めました。養殖漁業では労働軽減により生産性の向上を目指す必要があり、自動化技術が導入できるところは果敢に技術開発に挑戦していかないといけません。養殖漁業において餌やりは大変な労力ですので開発したロボット漁船により自動での餌やりを実現していこうと思っています。2022 年度には 1/7 モデルではありますが、生け簀への自動着岸に加えて自動係船も実現しています。2023 年 3 月現在、リスクの高さや技術的なハードルの高さ等もあり技術移転する企業もなかったのも、自身で株式会社ロボティクスセーリングラボという新法人を立ち上げ、ここに技術移転しています。次の研究開



発のステージでは波浪や風や流れの中での挙動が重要になると思います。ここでもやはり海事流体力学の知識が役に立っています。

将来、皆さん方の中に自身の特許やアイデアを盛り込んだ商品を生み出し、専門知識を生かしてその商品を高度化し、社会課題を解決しようとする方々が増えることを願ってやみません。海事分野で浮体を使う際にはこの浮体運動学の専門知識が必ず役に立つであろうと思います。

## 参考文献

- [1] 経済産業省資源エネルギー庁. 令和元年度エネルギーに関する年次報告 (エネルギー白書 2020). 2020. <https://www.enecho.meti.go.jp/about/whitepaper/2020html/2-1-1.html>.
- [2] Ramboll. Anholt offshore wind farm - denmark's largest offshore wind farm. Technical report, Ramboll, 2011. <https://ramboll.com/projects/re/anholt-offshore-wind-farm>.
- [3] 経済産業省資源エネルギー庁. 第 2 回 洋上風力の産業競争力強化に向けた官民協議会, 2020. [https://www.meti.go.jp/shingikai/energy\\_environment/yojo\\_furyoku/002.html](https://www.meti.go.jp/shingikai/energy_environment/yojo_furyoku/002.html).
- [4] NGI(Norwegian Geotechnical Institute). R & d program— oc6 - improve offshore wind computer modelling. Technical report, NGI(Norwegian Geotechnical Institute), 2019. <https://www.ngi.no/eng/Projects/OC6-improve-offshore-wind-computer-modelling>.
- [5] Walt Musial. Overview of floating offshore wind. National Renewable Energy Laboratory (NREL), 2020. <https://www.nrel.gov/news/video/overview-of-floating-offshore-wind-text.html>.
- [6] Yasunori Nihei, Kazuhiro Iijima, Motohiko Murai, and Tomoki Ikoma. A comparative study of motion performance of four different fowt designs in combined wind and wave loads. *33rd International Conference on Ocean, Offshore and Arctic Engineering*, No. OMAE2014-24643, pp. 1–10, 2014.
- [7] Irene Rummelhoff. World' s first floating wind farm has started production. Technical report, equinor, 2017. <https://www.equinor.com/en/news/worlds-first-floating-wind-farm-started-production.html>.
- [8] EnergyShift 編集部. 戸田建設に聞く ( 2 ) 実用化が進む洋上風力発電～戸田建設が挑む「浮体式」とは. Technical report, EnergyShift, 2019. <https://energy-shift.com/news/aa2dc32a-886c-4b85-bdd7-f3bb9b54e7de>.
- [9] 二瓶泰範, 神田信之, 高岩千人, 北村眞一, 小田健次, 久川俊一, 増山豊. 一点係留機構を用いた浮体式洋上風車の実海域試験. 日本船舶海洋工学会平成 27 年春季講演会論文集, No. 20, pp. 49–52, 2019.
- [10] 二瓶泰範, 北村眞一, 松田有祐, 神田信之, 高岩千人. 浮体式洋上風力発電装置 特許 6617907 号. 2019.
- [11] Yasunori Nihei, Yusuke Matsuda, Shinichi Kitamura, Kazuhito Takaiwa, and Nobuhiro Kanda. Research and development about the mechanisms of a single point mooring system for offshore wind turbines. *Ocean Engineering*, Vol. 147, pp. 431–446, 2018.
- [12] 国立研究開発法人新エネルギー・産業技術総合開発機構 (NEDO) 他. 日本初のバージ型浮体式洋上風力発電システム実証機が完成—北九州市沖に設置後、実証運転開始へ—. Technical report, NEDO, 2018. [https://www.nedo.go.jp/news/press/AA5\\_101008.html](https://www.nedo.go.jp/news/press/AA5_101008.html).
- [13] Hideyuki Suzuki, Hiroki Shiohara, Anja Schnepf, Hidetaka Houtani, Lucas H. S. Carmo, Shinichiro Hirabayashi, Ken Haneda, Toshiki Chujo, Yasunori Nihei, Edgard B. Malta, and Rodolfo T. Goncalves. Wave and wind responses of a very-light fowt with guy-wired-supported tower: Numerical and experimental studies. *Journal of Marine Science and Engineering*, Vol. 8, No. 11, pp. 841–841, 2020.
- [14] EOLINK. First prototype 1/10th 2018. Technical report, EOLINK, 2018. <http://eolink.fr/fr/>.
- [15] 越塚誠一, 柴田和也, 室谷浩平. 粒子法入門. 第 4 刷. 丸善出版株式会社, 2016.
- [16] 今井功. 流体力学 (前編). 裳華房, 第 25 版, 1999.
- [17] J. N. Newman. *Marine Hydrodynamics*. The MIT Press, 1977.
- [18] 二瓶泰範. 海洋工学を学ぶ人のための流体力学. 第 2 版. Marine Hydrodynamics Laboratory, 大阪公立大学,

- 2022.
- [19] Sharath Srinivasamurthy, Saika Iwamatsu, Kazuki Hashimoto, Hideyuki Suzuki, Toshiki Chujo, Ken Haneda, and Yasunori Nihei. Study of slow-drift damping on wind tracking performance of a new-type fowt ‘optiflow’ with single-point mooring. *Ocean Engineering*, Vol. 242, pp. 1–11, 2021. 110131.
  - [20] 水野明哲. 流れの数値解析入門. 浅倉書店, 1990.
  - [21] 田中正隆, 松本敏郎, 中村正行. 境界要素法. 計算力学と CAE シリーズ 2. 培風館, 1991.
  - [22] 神谷紀生. 演習 境界要素法. セミナーライブラリ計算機 3. サイエンス社, 昭和 62 年.
  - [23] 日本造船学会海洋工学委員会性能部会編集. 実践浮体の流体力学 前編. 成山堂書店, 2003.
  - [24] 鈴木英之他. 日本船舶海洋工学会浮体式洋上風力特別検討委員会報告書. 日本船舶海洋工学会, <http://www.jasnaoe.or.jp/research/committee.html>, 2015.
  - [25] 村井基彦, 二瓶泰範, 松浦みどり, 高橋健作. 一点係留型浮体式風車の風向追従に関する実験的研究. 日本船舶海洋工学会講演会論文集, No. 18, pp. 117–120, 2014.
  - [26] 飯島一博, 黒田結子, 馬沖, 村井基彦, 二瓶泰範. 一点係留された浮体式洋上風力発電の回頭運動に関する研究. 日本船舶海洋工学会講演会論文集, No. 19, pp. 129–132, 2014.